Feuille d'exercices 9 : Continuité

Exercice 1:
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis y étudier la continuité :

$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $f_2(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \in [-1,1]\backslash\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $f_3(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ e & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$f_4(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0,+\infty[\backslash\{1\} \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ $f_5(x) = \begin{cases} \frac{x\ln x}{x-1} & \text{si } x \notin \{0,1\} \\ x & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$

Exercice 2:
Pour chaque fonction f, déterminer l'ensemble de définition, y étudier la continuité ainsi que les éventuels prolongements par continuité : (a) $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x-2}}$ (b) $f(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x})$ (c)$f(x) = x^x$

Exercice 3:
Etudier les fonctions suivantes uniquement au point x_0 :

(a) $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$ (b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ en $x_0 = 0$

Exercice 4:
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f s'annule.

Exercice 5:
Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine réelle.

Exercice 6:
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe $x \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$
2. *bonus :* Plus généralement, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.
   Indication : En ayant posé $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$, montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(k/n) = 0$.

Exercice 7: *pour aller plus loin*
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 8:

1. Montrer que l'équation $e^x + x = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. Vérifir alors que $\alpha \in [-1, 0]$.
2. Montrer qu'il existe un unique réel x strictement positif tel que $\ln x = \frac{1}{e^x}$. Vérifier alors que $x \in [1, 3]$.

Exercice 9:
Montrer que les fonctions suivantes définissent une bijection de I sur un intervalle à préciser.
Donner alors le tableau de variations de la réciproque puis déterminer la réciproque.

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$, $I = [-\frac{1}{2}, +\infty[$ $g(x) = \dfrac{2x^2+x+2}{x^2+1}$, $I = [1, +\infty[$

Exercice 10:

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $xe^x = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on notera x_n.
2. Etudier la monotonie de la suite (x_n) et déterminer sa limite (en justifiant !).

Exercice 11:
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que, pour chaque entier $n \geqslant 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On note x_n cette solution. Que vaut x_2 ?
2. Justifier : $\forall n \geqslant 2, \quad \frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant \frac{2}{n}$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq2}$ converge.
3. En utilisant la définition de x_n, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$. En déduire un équivalent de x_n.
4. Pour $n \geq 2$, étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[0, 1]$, et en déduire $f_n(x_{n+1}) \geq 0$.
   Déterminer alors la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq2}$.

Exercice 12: `Edhec E 97` *pour s'entraîner et aller plus loin*
Pour tout entier $n \geq 3$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x - n\ln x$.

1. Etudier la fonction f_n et dresser son tableau de variations complet.
2. En déduire, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.
3. Montrer que $1 < u_n < e$.
4. ** Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq3}$ est décroissante puis qu'elle converge.
6. Montrer que pour tout $n \geq 3$, $0 \leq \ln u_n \leq \frac{e}{n}$. En déduire la limite de la suite u.