Dérivée seconde

Exercice 1:

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Soit $x_0 \in]a,b[$. On pose pour $t \in [a,b]$, $\varphi(t) = f(t) - A(t-a)(t-b)$ avec $A = \frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$.
   a) Calculer $\varphi(a), \varphi(b)$ et $\varphi(x_0)$.
   b) En déduire que φ' s'annule au moins deux fois sur $[a,b]$. Que peut-on obtenir sur φ'' ?
   c) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} f''(c)$.
2. Justifier alors qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$.

Convexité : pour aller plus loin uniquement, à l'aide de la définition

Exercice 2:

Montrer que la fonction $t \mapsto t^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3:

Montrer que si f est convexe sur $\mathbb{R}$ et si g est convexe et croissante sur $\mathbb{R}$ alors $g \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4:

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une application. On dit que f est log-convexe si $ln(f)$ est convexe.

1. Montrer que si f est log-convexe, alors f est convexe.
2. On suppose que f est de classe C^2. Montrer que f est log-convexe ssi $f \times f'') \geq (f')^2$.

Convexité : dans le cadre des fonctions de classe C^2

Exercice 5:

En utilisant la convexité/concavité de certaines fonctions usuelles, établir les inégalités suivantes :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leq \dfrac{e^x + e^y}{2}$.
2. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\boxed{\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)}$
3. $\boxed{\forall x \geq 0,\ \ln(1+x) \leq x.}$
4. Montrer que $\boxed{\forall x \in [0,1],\ \sin x \leq x}$. L'inégalité reste-t-elle vraie sur $\mathbb{R}^+$?
5. Exercice du cours : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x}$

Exercice 6: *pour s'entraîner*

1. Etudier la convexité de $x \mapsto x^p$ sur $\mathbb{R}^+$, lorsque p est un entier supérieur ou égal à 2.
2. En déduire que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

Exercice 7:

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer que f y est concave.
2. En déduire : $\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2, \quad \ln\big(\frac{x+y}{2}\big) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.

Exercice 8:

On considère la fonction f définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{\ln x} & \text{sinon} \end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0,1[$.
   f peut-elle se prolonger par continuité en 1 ?
2. Dresser le tableau de variations complet de f.
3. Etudier la convexité de f sur $]0,1[$.
   Déterminer le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ et une équation de la tangente en ce point.
4. *bonus :* tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ (on donne $\frac{e^2}{4} \approx 1,8$ et $e^{-2} \approx 0,1$).

Exercice 9: *pour s'entraîner*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Montrer que f n'admet pas de point critique sur $\mathbb{R}$. Qu'en déduit-on ?
2. Dresser le tableau de variations complet de f (donc limites incluses).
3. Etudier la parité de f sur $\mathbb{R}$.
4. Etudier la convexité de f.
   Déterminer le(s) point(s) d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ et une équation de la tangente en ce(s) point(s).
5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$, en soignant la position de la courbe et de la tangente au(x) point(s) d'inflexion.

Exercice 10: *pour aller plus loin uniquement*

1. Vérifier que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, des réels strictement positifs. Montrer que $\left(\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)\right)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$.
   indication : pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pourra poser $y_k = \ln(x_k)$ et montrer l'inégalité correspondante sur les y_k
3. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2 \ldots, b_n$ des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité
   $\left(\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}}$.

Extrema

Exercice 11:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - 2x^6$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Vérifier qu'en 1 et -1, il y a un extremum local. Qu'en est-il en 0 ?
3. Dresser le tableau de variations complet de f, pour finir l'étude des extrema locaux et globaux de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12: *pour s'entraîner*

Adapter le plan d'étude de l'exercice précédent à la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^3(1 - \frac{3}{5}x^2)$.

Exercice 13:

Déterminer le minimum et le maximum global de $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ sur $[0, 3]$ SANS dresser son tableau de variations.
On pourra commencer par justifier l'existence de ce minimum et de ce maximum...

Exercice 14:

Soit la fonction f définie pour tout $x \in]0, 1[$, par $f(x) = -\ln(x - x^5)$.

1. Justifier que f est bien définie sur $]0, 1[$.
2. Déterminer les points critiques de f sur $]0, 1[$.
3. Montrer que f est convexe sur $]0, 1[$. Qu'en déduit-on ?
4. Faire le tableau de variations complet de f pour vérifier la déduction du 4.

Exercice 15:

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} + ax + b$.

1. Vérifier que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Pour quelles valeurs de a, f admet-elle un minimum global sur $\mathbb{R}$?