Eléments de correction de la feuille Calcul :

FRACTIONS

Exercice 1 :
(a) $\frac{3}{4} - \frac{11}{10} = \frac{15-22}{20} = -\frac{7}{20}$ Choix du meilleur dénominateur commun : $4 = 2 \times 2$ et $10 = 5 \times 2$ donc on choisit comme dénom $2 \times 2 \times 5 = 20$ (qui "contient" bien le 4 et 10, mais sans répéter inutilement le 2).

(b) $\frac{1}{36} - \frac{1}{45} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9\times4} - \frac{1}{9\times5} + \frac{1}{9} = \frac{5-4+4\times5}{9\times4\times5} = \frac{21}{9\times4\times5} = \frac{7}{3\times4\times5} = \frac{7}{63}$.

(c) $\frac{3}{\frac{3}{7}} = 3 \times \frac{7}{3} = 7$. Ou simplifier directement les 3 : $\frac{3}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{\frac{1}{7}} = 7$.

(d) $\frac{1}{\frac{63}{40} \times \frac{16}{27}} = \frac{40\times27}{63\times16} = \frac{8\times5\times9\times3}{9\times7\times8\times2} = \frac{5\times3}{7\times2} = \frac{15}{14}$.

(e) $\frac{\frac{7}{9}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{4} = \frac{7}{3} \times 4 = \frac{7}{12}$. OU $\frac{\frac{7}{9}}{\frac{4}{3}} = \frac{7}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

(f) $\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{3+2}{12}} = \frac{12}{5}$.

(g) $\frac{3}{4} \times \frac{12}{5} = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$.

(h) $\frac{7}{18} - \frac{13}{60} = \frac{7\times10-13\times3}{180} = \frac{31}{180}$
Choix du meilleur dénom : $18 = 3 \times 3 \times 2$ et $60 = 3 \times 2 \times 5 \times 2$. D'où dénom $= 3 \times 3 \times 2 \times 5 \times 2 = 180$.

(i) $\frac{7}{12} - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{7}{3\times4} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3\times3} = \frac{21-24+8}{3\times4\times3} = \frac{5}{36}$

(j) $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{5}{3\times4} = \frac{3\times12+5\times3-5\times5}{5\times4\times3} = \frac{26}{5\times4\times3} = \frac{13}{5\times2\times3} = \frac{13}{30}$.

(k) $(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}) \times (\frac{9}{4} + \frac{21}{6}) = (\frac{3}{2} - \frac{5}{4}) \times (\frac{9}{4} + \frac{7}{2}) = \frac{6-5}{4} \times \frac{9+14}{4} = \frac{23}{16}$.

(l) $\frac{\frac{26}{18} \times \frac{-45}{7}}{\frac{39}{14}} = -\frac{\frac{13\times2\times9\times5}{9\times2\times7}}{\frac{13\times3}{2\times7}} = -\frac{10}{3}$ (tout se simplifie !).

Exercice 2 :
(a) $\frac{35}{91} = \frac{7\times5}{7\times13} = \frac{5}{13}$.
(b) fraction irréductible (29 n'est dans aucune table !)
(c) $\frac{123}{312} = \frac{90+33}{312} = \frac{3\times41}{3\times104} = \frac{41}{104}$ qui ne simplifie plus (41 n'est dans aucune table)....

Exercice 3 :
(a) $\frac{2x+3}{2} = x + \frac{3}{2}$
(b) $= -\frac{2x-6}{2} = -(x-3) = -x+3$
(c) attention, pas de simplification possible !
(d) $\frac{3x-6}{-3} = -\frac{3x-6}{3} = \frac{-(3x-6)}{3} = \frac{-3x+6}{3} = -x+2$
(e) $a^4 - b^2 = (a^2)^2 - b^2 = (a^2-b)(a^2+b)$ (identité remarquable) d'où $\frac{a^4-b^2}{a^2-b} = a^2 + b$.

Exercice 4 :
1. Soit a, b, réels tels que $0 < a \leq b$. Alors $\frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b} = \frac{(a+1)b-a(b+1)}{b(b+1)} = \frac{ab+b-ab-a}{b(b+1)} = \frac{b-a}{b(b+1)} \geq 0$ par hypothèse. Donc on a bien : $\frac{a+1}{b+1} \geq \frac{a}{b}$.
2. $\frac{5}{33} = \frac{15}{99} \leq \frac{16}{100} = 0.16$ d'après 1.
Et $0.16 = \frac{16}{100} \leq \frac{17}{101}$ toujours d'après 1.
Enfin, $\frac{1}{7} = \frac{5}{35} \leq \frac{5}{33}$ puisque $33 < 35$ d'où l'ordre suivant : $\frac{1}{7} \leq \frac{5}{33} \leq 0.16 \leq \frac{17}{101}$.

Exercice 5 :
1. Comme $ad > 0$, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}bd > \frac{c}{d}bd \Leftrightarrow ad > cb$ et comme $\frac{1}{cd} >$, on continue : $\Leftrightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.
2. On sait déjà : $\frac{1000}{1001} = \frac{2000}{2002} > \frac{2000}{2003}$ puisque $2002 < 2003$.
De même, $\frac{3000}{3005} < \frac{3000}{3003} = \frac{1000}{1001}$.
Puis en utilisant le 1., $\frac{2000}{2003} > \frac{3000}{3005} \Leftrightarrow 2000 \times 3005 > 2003 \times 3000 \Leftrightarrow 2 \times 3005 > 2003 \times 3 \Leftrightarrow 6010 > 6009$ vrai ! (ou partir de $\frac{2000}{2003} < \frac{3000}{3005} \Leftrightarrow \frac{2000}{3000} > \frac{2003}{3005} \Leftrightarrow \frac{2}{3} > \frac{2003}{3005} \Leftrightarrow 2 \times 3005 > 3 \times 2003$ ....).
Finalement, $\frac{1000}{1001} > \frac{2000}{2003} > \frac{3000}{3005}$

FACTORISATIONS, IDENTITES REMARQUABLES ET RACINES CARREES

Rappel des identités remarquables : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Exercice 6 :
(a) factorisation d'un trinôme : $\Delta = 9$, deux racines $-\frac{1}{2}$ et 1, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 - x - 1 = 2(x+\frac{1}{2})(x-1)$.
(b) Polynôme de degré3, mais factorisation par x évidente : $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2$ (identité remarquable, ou au pire, passer par $\Delta = 0$...).
(c) Par exemple, $(x-2)^3 = (x-2)^2(x-2) = (x^2-4x+4)(x-2) = ... = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ (variante par la formule du binôme ....)

Exercice 7 :
$A = 9x^2 + 18x + 9 - (36 - 12x + x^2) = 8x^2 + 30x - 25$
$B = 4 + 4x + x^2 - (4 - x^2) = 2x^2 + 4x$.
$C = (x-3)^2(x-3) = (x^2 - 6x + 9)(x-3) = x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 18x + 9x - 27 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
Exercice 8 :
$A = (3x-1)[(4x+x^2)-x] = (3x-1)(3x+x^2) = (3x-1)x(3x+1)$ On peut encore reconnaître une identité remarquable, pour obtenir la forme $A = x(9x^2-1)$ mais elle ne sera pas plus utile que la précédente ...
$B = (2x-1)^2[2x-1-1] = (2x-1)^2(2x-2)$
$C = (x+3)(x-2)(x+2) - (x+2)^2(x-2) = (x-2)(x+2)[(x+3)-(x+2)] = (x-2)(x+2)$

Exercice 9 :
$A = (\sqrt{7})^2 - 3^2 = 7 - 9 = -2$
$B = (2\sqrt{3})^2 - 20\sqrt{3} + 25 = 2^2(\sqrt{3}^2) - 20\sqrt{3} + 25 = 37 - 20\sqrt{3}$.
$C = \sqrt{2\times 3}\sqrt{7\times 2}\sqrt{7} = (\sqrt{7})^2(\sqrt{2})^2\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$

D : On va uiliser une technique particulière à savoir $\boxed{\text{multiplier par la quantité conjuguée}}$
C'est une méthode à laquelle on pourra penser quand on aura un problème (de calcul ou de **limites**) lié à une quantité du type $\sqrt{a} \pm b$, ou $a \pm \sqrt{b}$ ou encore $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. Il suffit de retenir que l'on multiplie en haut et en bas par "l'autre".
Exemple : $\sqrt{a} - b = \dfrac{(\sqrt{a}-b)\times(\sqrt{a}+b)}{\sqrt{a}+b} = \dfrac{(\sqrt{a})^2 - b^2}{\sqrt{a}+b} = \dfrac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}$. Il reste à simplifier le numérateur.

Ici on applique cette méthode à chaque dénominateur, afin de simplifier les dénominateurs et donc les fractions.
$$D = \frac{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} + \frac{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = \frac{(\sqrt{3}+2)^2}{\sqrt{3}^2 - 4} + \frac{(\sqrt{3}-2)^2}{\sqrt{3}^2-4} = -[3 - 4\sqrt{3} + 4 + 3 + 4\sqrt{3} + 4] = -14$$

E : Comme $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ dès que $a \geq 0$ et $b \geq 0$
$E = \sqrt{(2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}) \times (2 - \sqrt{2+\sqrt{2}})} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2+\sqrt{2}})^2} = \sqrt{4 - (2+\sqrt{2})} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Pour F : Attention, $\sqrt{x^2} = |x|$ ($\neq x$!!).
Donc $F = |2-\sqrt{5}| - |3-\sqrt{5}|$. Il reste à connaître les signes des intérieurs de $|...|$ pour pouvoir enlever les valeurs absolues. Or $4 \leq 5 \leq 9 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{5} \leq 3$, par croissance de la racine carrée.
On en déduit : $2 - \sqrt{5} \leq 0$ et $|2-\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5})$ et $3 - \sqrt{5} \geq 0$ d'où $|3-\sqrt{5}| = 3 - \sqrt{5}$.
d'où $F = -2 + \sqrt{5} - 3 + \sqrt{5} = -5 + 2\sqrt{5}$.

Exercice 10 :
Même technique que précédemment : $\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{5})} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{2-5} = -(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ donc $a = b = -1$ conviennent.

Exercice 11 :
Pour $x \leq 1$, $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = -(x-1) = 1 - x$ puisque $x - 1 \leq 0$.
$\sqrt{(1-2x)^4} = \sqrt{((1-2x)^2)^2} = |(1-2x)^2| = (1-2x)^2$ $(= 1 - 4x + 4x^2)$.

PUISSANCES

Exercice 12 :
(a) $2^{12} \times (2^3)^6 = 2^{12} \times 2^{3*6} = 2^{30}$
(b)$(-2)^{2020} = (-1)^{2020} \times 2^{2020} = 2^{2020}$ car 2020 est un entier pair.
(c) $\dfrac{8^4}{4^4} = \dfrac{(4\times 2)^4}{4^4} = \dfrac{4^4 \times 2^4}{4^4} = 2^4$. Variante : $\dfrac{8^4}{4^4} = \dfrac{(2^3)^4}{(2^2)^4} = \dfrac{2^{12}}{2^8} = 2^{12-8} = 2^4$.
(d) $4^{-5} = (2^2)^{-5} = 2^{-10}$
(e) $\dfrac{2^3}{\sqrt{2}^3} = (\frac{2}{\sqrt{2}})^3 = (\sqrt{2})^3 = (2^{1/2})^3 = 2^{3/2}$
(f) $(\sqrt{2})^{4n} = (2^{1/2})^{4n} = 2^{2n}$.
(g) C'est l'intrus car $(-4)^n = (-1)^n 4^n = (-1)^n (2^2)^n = (-1)^n 2^{2n}$ donc il ne reste pas qu'une puissance de 2 !
(h) $(-\sqrt{2})^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(2^{1/2})^{2n+1} = -2^{n+1/2}$ car $2n+1$ est un entier impair donc $(-1)^{2n+1} = -1$.

Exercice 13 :
(a) $q^{n+1} = q^n \times q$
(b) $q^{n-1} = q^n \times q^{-1} = q^n \times \frac{1}{q}$
(c) $q^{-n+1} = q^{-n} \times q = q\frac{1}{q^n}$.
(d) $q^{2n} = (q^n)^2$
(e) $q^{2n-1} = q^{2n} \times q^{-1} = \frac{1}{q} \times (q^n)^2$
(f) $q^{n+1} - q^n = (q-1) \times q^n$

(g) $= q^{2n+1-(n-1)-\frac{1}{2}} = q^{3/2} \times q^n = q\sqrt{q} \times q^n$

Exercice 14 :
(a) $5^{2n-1} = 5^{2n} \times 5^{-1} = \frac{1}{5} \times (5^2)^n = \frac{1}{5}(25)^n$
(b) $(-1)^n \times 2^{n+1} = 2(-1)^n 2^n = 2(-2)^n$ (pour regrouper les deux termes puissances, il faut la même puissance : cela marche pour les $\times$ comme pour les quotients)
(c) $\frac{1}{3^n} = (\frac{1}{3})^n$
(d) $\frac{2^{n+1}}{5^{n-2}} = \dfrac{2^n \times 2}{5^n \times 5^{-2}} = 2 \times 5^2(\frac{2}{5})^n$
(e) $-(-1)^n \times \frac{2^n \times 2^{-1}}{(3^3)^n} = -\frac{1}{2}\frac{(-1\times 2)^n}{(3^3)^n} = -\frac{1}{2}(\frac{-2}{3^3})^n$.
(f) $2^{n-1} \times 3^{2n+1} = 2^n \times \frac{1}{2} \times (3^2)^n \times 3 = \frac{3}{2}(2 \times 9)^n$
(g) $3^{n+2} \times 5^{3n-1} = 9 \times 3^n \times \frac{1}{5}(5^3)^n = \frac{9}{5}(3 \times 5^3)^n$.

Exercice 15 :
$2^{k+1} = 2^k \times 2$ d'où $r^{2^{k+1}} = r^{2^k \times 2} = (r^{2^k})^2$

Exercice 16 :
Pour pouvoir comparer, il est plus facile d'avoir la même puissance : or on remarque que $222 > 220 = 22 \times 10$. Départs possibles : on a $2^{222} > 2^{220}$ OU partir de $2^{222} = 2^{220+2} = 2^{220} \times 4$.

Puis $2^{220} = 2^{22\times 10} = (2^{10})^{22}$. Or $2^{10} = 1024$ donc est beaucoup plus grand que 22.

Conclure : 2^{222} est beaucoup beaucoup beaucoup plus grand que 22^{22}.

Exercice 17 :
Pour pouvoir simplifier les puissances, il faut les décomposer :
par exemple $(-50)^3 = -(50)^3 = -(25 \times 2)^3 = -25^3 \times 2^3$. On pourra ainsi simplifier avec le 25^4 au dénominateur, et il restera juste 25 en bas etc.
La fraction cherchée est donc : $-\dfrac{9^7 \times 2^7 \times 2^4 \times 25^3 \times 2^3}{25^4 \times 2^{10} \times 9^2 \times 3^2} = \dfrac{9^5 \times 2^{14}}{25 \times 2^{10} \times 9} = \dfrac{9^4 \times 2^4}{25} (= \dfrac{3^8 \times 2^4}{5^2})$.
Pour le (b), on trouve : $\frac{6^4 \times 9^4 \times 2^4}{6^3 \times 2^3 \times (-1) \times 9^6} = -\dfrac{6 \times 2}{9^2} = -\dfrac{4}{27}$.

EXPONENTIELLE et LOGARITHME

Exercice 18 :
(a) $\ln(e^2) = 2\ln(e) = 2$
(b) $e^{3\ln(2)} = e^{\ln(2^3)} = 2^3 = 8$
(c) $\ln(12) - \ln(6) = \ln(\frac{12}{6}) = \ln(2)$
(d) $e^{-\ln(3)} = e^{\ln(1/3)} = \frac{1}{3}$ Variante : $e^{-\ln(3)} = \frac{1}{e^{\ln(3)}} = \frac{1}{3}$.
(e) $\frac{\ln(2)}{\ln(16)} = \frac{\ln(2)}{\ln(2^4)} = \frac{\ln(2)}{4\ln(2)} = \frac{1}{4}$.

Exercice 19 :
(a) $\ln(2) + \ln(4) = \ln(2) + \ln(2^2) = 3\ln(2)$
(b) $\ln(2) - \ln(2^3) = -2\ln(2)$
(c) $\ln(4\sqrt{2}) = \ln(4) + \ln(\sqrt{2}) = \ln(2^2) + \frac{1}{2}\ln(2) = 2\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{5}{2}\ln(2)$.
(d) $\ln(8) - \ln(\sqrt{2}) = 3\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{5}{2}\ln(2)$ (ou simplifier $\frac{8}{2^{1/2}} = 2^{3-1/2} = 2^{5/2}$ puis prendre le ln).

Exercice 20 :
Soit $t > 0$.
(a) $e^{2\ln(t)} = e^{\ln(t^2)} = t^2$.
(b) $e^{-\ln(t)} = e^{\ln(1/t)} = \frac{1}{t}$
(c) Si on fait "comme avant" : $\frac{e^{2t+\ln(3)}}{e^t} = \frac{e^{2t} \times e^{\ln(3)}}{e^t} = \frac{(e^t)^2 \times 3}{e^t} = 3e^t$.
Mais ici, il y a un peu plus simple : $\frac{e^{2t+\ln(3)}}{e^t} = e^{2t+\ln(3)-t} = e^{t+\ln(3)} = e^t e^{\ln(3)} = 3e^t$.

(d) $\ln(\frac{1}{e^{2t}}) = -\ln(e^{2t}) = -2t$ OU $\ln(\frac{1}{e^{2t}}) = \ln(e^{-2t}) = -2t$.
(e) $\ln(\frac{e^{2t-1}}{e^{-t}}) = \ln(e^{2t-1+t}) = \ln(e^{3t-1}) = 3t - 1$ OU $\ln(\frac{e^{2t-1}}{e^{-t}}) = \ln(e^{2t-1}) - \ln(e^{-t}) = 2t - 1 - (-t) = 3t - 1$.

Exercice 21 :
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\frac{1}{e^{-x}+1} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}+1} = \frac{1}{\frac{1+e^x}{e^x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$.

Exercice 22 :

Soit $t \in \mathbb{R}$. $\dfrac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} = \dfrac{\frac{1}{e^t}}{\dfrac{e^{2t}+1}{e^{2t}}} = \dfrac{1}{e^t} \times \dfrac{e^{2t}}{e^{2t}+1} = \dfrac{e^t}{e^{2t}+1}$ puisque $\dfrac{e^{2t}}{e^t} = e^{2t-t} = e^t$.

Exercice 23 :

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Vu le dénominateur, il faut mettre en facteur e^x puisque $e^x + 1 = e^x(1 + \frac{1}{e^x}) = e^x(1+e^{-x})$. Par ailleurs, si on met e^x en facteur au numérateur, on obtient : $e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$ puisque $e^{2x} = (e^x)^2$.

D'où $\dfrac{e^{2x}-e^x}{e^x+1} = \dfrac{e^x(e^x-1)}{e^x(1+e^{-x})} = \dfrac{e^x-1}{1+e^{-x}}$. La bonne réponse est donc la réponse (b).

INEGALITES

Exercice 24 :

Rappel, les tableaux de signe sont à envisager lorsqu'on cherche le signe d'un produit ou d'un quotient, mais ne sont d'aucune utilité lorsque on cherche le signe d'une somme ou d'une différence :
en effet, $2 + (-1) = 1 \geq 0$ mais $1 + (-2) = -1 \leq 0$ donc on ne peut rien dire sur le signe d'une somme dont les termes ne sont pas de même signe !

(a) ici on a un quotient : faire un tableau de signe avec 3 lignes : une ligne pour $1 - 2x$, une ligne pour x et une ligne pour $1 - x$.

(b) la forme d'une somme n'est pas appropriée (cf remarque ci-dessus), on cherche à factoriser : $x(x^2 - x + 2)$: il reste à faire un tableau de signe avec deux lignes : une ligne pour x, et une ligne pour le trinôme $x^2 - x + 2$ (commencer par chercher $\Delta = 9$...!)

(c) ici on a une somme donc problème : factorisation pas évidente, donc on décortique : $x^2 + x + 1$: $\Delta < 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$, et comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x^2} > 0$ on peut conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2} > 0$.

(d) Même problème de somme qu'au (c), mais en plus, le signe de chaque terme peut changer : on commence par mettre au même dénominateur (même idée que la factorisation du (b) !) $\frac{x^2-3x+2}{x}$. Il reste à faire un tableau de signe avec une ligne pour le trinôme $x^2 - 3x + 2$ ($\Delta = 1$...), et une ligne pour x.

Exercice 25 :

(a) Par somme, $a + b + c \geq 3 + 4 - 2 = 5$

(b) Par produit avec $-2 \leq 0$, $a \geq 3 \Rightarrow -2a \leq 6$.

(c) On a $d \leq -1$ et $-a \leq -3$ donc par somme, $d - a \leq -1 - 3 = -4$.

(d) Comme $a \geq 3 \geq 0$, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, $a^2 \geq 3^2 = 9$.

(e) On ne peut rien dire, car on ne connait pas le signe de c, et la fonction carrée n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$. (Par exemple, si on avait $-2 \leq c \leq 0$, on aurait $c^2 \leq 4$, mais on pourrait très bien avoir $c = 10$ et alors $c^2 = 100$!)
Par contre, on a toujour $c^2 \geq 0$ ....

(f) Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on obtient $e^d \leq e^{-1}$

(g) Par produit d'inégalités positives, on obtient $ab \geq 3 \times 4 = 12$.

(h) Le produit ne "marche" plus puisque c peut être négatif : ici, ac n'est ni majorée ni minorée. (par exemple avec $c = 1$, $ac = a$ peut être aussi grand que l'on veut puisque a est quelconque $a \geq 3$, et avec $c = -1$, $ac = -a$ peut être aussi petit que l'on veut)

(i) Il n'y a plus de résultat de cours. A la main $-d \geq 1$ donc par produit d'inégalités positives $a \times (-d) \geq 3 \times 1 = 3$ càd $-ad \geq 3$. D'où $ad \leq -3$.

Exercice 26 :

1. Faire une étude de fonction : on pose $f(x) = e^x - 1 - x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$. Or $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \ln(1) = 0$ par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
D'où (faire le TV), f admet un minimum en 0 de valeur $f(0) = 0$. Donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

2. Par récurrence, puisque la propriété dépend de l'entier n (et non d'un réel x comme ci-dessus).
$n = 1$: $2^1 = 2 \geq 1$.
Supposons que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^n \geq n$, et montrons que pour ce n, $2^{n+1} \geq n+1$. Or $2^{n+1} = 2 \times 2^n$, donc comme $2^n \geq n$ par *H.R.*, on en déduit $2^{n+1} \geq 2n$. Il reste à montrer que $2n \geq n+1$: or $2n - (n+1) = n - 1 \geq 0$ puisque $n \in \mathbb{N}^*$.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \geq n$.
(On peut réaliser que pour $n = 0$, le résultat reste vrai puisque $2^0 = 1 \geq 0$, donc finalement, on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.)

REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

Exercice 27 :
(a) comprendre que l'action du +1 consiste à ajouter 1 au niveau des ordonnées à la fonction exp, donc il suffit de translater la courbe exp de 1 verticalement.

(b) $\ln(1/x) = -\ln(x)$ donc c'est l'opposé de la fonction ln bien connue. Graphiquement, cela revient à faire une symétrie par rapport à l'axe des abscisses (puisque il faut prendre pour chaque ordonnée l'opposé ...)

(c) ici, c'est peut-être plus difficile à voir (donc ne pas hésiter à faire le TV, et/ou à prendre quelques images particulières pour bien comprendre la translation) : on va se ramener à l'allure de la courbe $x \mapsto x^3$, mais on ajoute 1 à x : donc c'est en $x = -1$ que l'ordonnée est nulle etc. Il suffit donc de translater la courbe du cube horizontalement d'une unité ver la gauche.

(d) pour représenter $x \mapsto e^{-x}$ (là encore, peut-être le TV vous simplifiera la tâche), il faut réaliser qu'on applique la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées à la courbe exp : en effet, en $x = -1$ on cherche l'image par exp de $x = 1$, en $x = -2$, on prend l'image de l'exp en $x = 2$ etc.

(e) là encore la courbe va ressembler à celle du sinus, mais il y a une "dilatation/contraction" (ici contraction) du fait du facteur multiplicatif 2 devant le x : donc par exemple, c'est en $x = \frac{\pi}{4}$ que $\sin(2x) = 1$, c'est en $x = \frac{\pi}{2}$ que $\sin(2x) = 0$ etc. Bref, la sinusoide sera plus resserrée.

DERIVATION

Exercice 28 :
Attention, pour (a) comme pour (b), (d) etc, il faut laisser la constante multiplicative devant !

(a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ d'où $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$.
(b) $f(x) = \frac{1}{4}\ln(x)$ d'où $f'(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{x}$.
(c) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
(d) $f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x}$ donc $f'(x) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{x^2})$
(e) Astuce ! $f(x) = e^{-x}$ d'où (formule e^u), $f'(x) = -e^{-x}$
(f) Astuce ! $f(x) = x^{-2}$ d'où $f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$
(g) $f'(x) = -\sin(x) - \cos(x)$
(h) $f'(x) = 4x^3\cos(x) + x^4(-\sin(x))$
(i) $f'(x) = \dfrac{\cos(x)(x^2+1) - \sin(x)(2x)}{(x^2+1)^2}$
(j) Idem astuce (cf (f)) : $f(x) = x^{-3}$ d'où $f'(x) = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$.
(k) Idem ! $f(x) = x^{-1/2}$ d'où $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(\sqrt{x})^3}$
(l) Idem ! $f(x) = 5(\ln(x))^{-1}$ d'où $f'(x) = 5 \times (-1)\frac{1}{x}(\ln(x)^{-2}) = \frac{-5}{x(\ln x)^2}$
(m) surtout ne pas voir un quotient mais mettre la constante devant $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ d'où $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.
(n) $f'(x) = 2e^{2x} - 3(-4)e^{-4x} = 2e^{2x} + 12e^{-4x}$.
(p) $f'(x) = -e^{-x}\cos(3x) + e^{-x}(-3\sin(3x))$
(q) $f(x) = \dfrac{(2e^{2x}+1)\sin(x) - (e^{2x}+x)\cos(x)}{(\sin^2(x))}$

Exercice 29 :
(a) $f(x) = e^x$ d'où $f'(x) = e^x$.
(b) $f(x) = \ln(2) + \ln(x)$ d'où $f'(x) = 0 + \frac{1}{x}$
(c) $f(x) = \sqrt{2}\sqrt{x}$ d'où $f'(x) = \sqrt{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 30 :
(a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
(b) $f'(x) = (3 \times 2x - 4)e^{3x^2-4x+1}$
(c) $f'(x) = 4 \times \cos(x)(\sin x)^3$
(d) $f'(x) = \frac{4x^3+2x}{2\sqrt{x^4+x^2+1}}$
(e) $f'(x) = \frac{(-\frac{1}{x^2}e^{1/x}+2x)(x^2+x+1)^3 - (e^{1/x}+x^2)(3(2x+1)(x^2+x+1)^2)}{(x^2+x+1)^6}$

Exercice 31 :
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2\frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x-x^2-1}{x^2} = -\frac{x^2-2x+1}{x^2} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} \leq 0$.
Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $f(1) = 0$ donc f est positive sur $]0,1]$ puis négative sur $[1, +\infty[$.
Limites intéressantes : en $0 (= 0^+$ ici$)$) FI entre le ln et le 1/x. Or $f(x) = \frac{2x\ln(x)+1}{x} - x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ puisque $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
En $+\infty$: F.I. entre le ln et le x. Or $f(x) = x(\frac{2\ln x}{x} - 1) + \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 32 :
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-a}{x^2} + \frac{1}{b} = \frac{-ab+x^2}{bx^2}$.
Donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > ab \Leftrightarrow x > \sqrt{ab}$ puisque $x > 0$.
Donc f admet un minimum (faire le TV !) en $\sqrt{ab}$ de valeur $f(\sqrt{ab}) = \frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{a}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\frac{\sqrt{b}}{b} = 2\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
Donc pour tout $x > 0$, $f(x) \geq f(\sqrt{ab}) = 2\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.