exercice 16 :

A : rédaction 1 soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

alors $AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -2y - 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ -2y - 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$ le sys n'est pas de Cramer. A non inversible.

rédaction 2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftrightarrow L_2$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$ $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

matrice triangulaire avec 1 coeff diag nul.
Donc A non inv.

C (1 seule rédact vue en cours) soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

alors $CX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2z = a \\ z = b \\ -y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2z = a \\ -y + z = c \\ z = b \end{cases}$

sys triang avec 3 pivots non-nuls donc de Cramer $\to$ C inv.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2b - a & (= -a + 2b) \\ y = b - c \\ z = b \end{cases}$ comme $X = C^{-1}Y$ $\left(\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$

on trouve $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

D soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$DX = Y \iff \begin{cases} x - y = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y = c \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = a \\ 3y + z = -a + b & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2y = -a + c & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y = a \\ y = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c & L_3 \leftrightarrow L_2 \\ 3y + z = -a + b \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = a \\ y = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \\ z = \frac{1}{2}a + b - \frac{3}{2}c \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \end{cases}$$

sys de Cramer car sys triang avec 3 pivots non-nuls donc D est inversible. On finit la résolution pour trouver D^{-1}

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \\ y = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \\ z = \frac{1}{2}a + b - \frac{3}{2}c \end{cases}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

pour G matrice 2×2 donc on peut utiliser le th du cours :

$2 \times 2 - 3 \times 3 = -5 \neq 0$ donc G est inversible

et $G = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

ou à la main $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$GX = Y \iff \begin{cases} 2x + 3y = a \\ 3x + 2y = b \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y = a \\ -5y = 2b - 3a & L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \end{cases}$$

G inv.

sys de Cramer $(2 \neq 0$ et $-5 \neq 0)$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a - 3y) = \overset{-2/5}{-\frac{4}{10}}a + \overset{=3/5}{\frac{6}{10}}b \\ y = -\frac{2}{5}b + \frac{3}{5}a \end{cases}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 3/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$