

exercice 18

f_4 : f_4 continue sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

car f_4 nulle sur $[0, +\infty[$, $\int_0^{+\infty} f_4$ cr et $\int_0^{+\infty} f_4(t) dt = 0$

étude de $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ (impropre en $-\infty$).

$$\text{soit } A < 0 \quad \int_A^0 e^x dx = [e^x]_A^0 = 1 - e^A \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} 1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{donc } \int_{-\infty}^0 f_4 \text{ cr et } \int_{-\infty}^0 f_4(t) dt = 1$$

$$\text{cf: } \int_{-\infty}^{+\infty} f_4 \text{ cr et } \int_{-\infty}^{+\infty} f_4(t) dt = 1 + 0 = 1.$$

$$F_4: \forall x \in \mathbb{R} \quad F_4(x) = \int_{-\infty}^x f_4(t) dt$$

$$\text{si } x < 0: F_4(x) = \int_{-\infty}^x e^t dt = \lim_{A \rightarrow -\infty} [e^t]_A^x = e^x$$

$$\text{si } x \geq 0: F_4(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^0 f_4(t) dt}_{=1} + \underbrace{\int_0^x f_4(t) dt}_{=0} = 1 + 0$$

f_5 : on peut remarquer que f_5 est paire sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf en $-\ln 2$ et $+\ln 2$.

étude de $\int_{-\infty}^{+\infty} f_5$. f_5 nulle sur $]\ln 2, +\infty[$ de $\int_{\ln 2}^{+\infty} f_5$ cr et vaut 0

$$\text{de plus } \int_0^{\ln 2} f_5(t) dt = \int_0^{\ln 2} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\ln 2} = 1 - e^{-\ln 2} = 1 - e^{\ln 1/2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

car $|t| = t$ pour $t \geq 0$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} f_5 \text{ cr et } \int_0^{+\infty} f_5(t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc par parité } \int_{-\infty}^{+\infty} f_5 \text{ cr et } \int_{-\infty}^{+\infty} f_5(t) dt = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$F_5(x) = \int_{-\infty}^x f_5(t) dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{si } x < -\ln(2), \quad F_5(x) = 0$$

$$\text{si } -\ln(2) \leq x \leq 0 \quad F_5(x) = \int_{-\infty}^{-\ln(2)} f_5(t) dt + \int_{-\ln(2)}^x f_5(t) dt$$

$$= 0 + \int_{-\ln(2)}^x e^{-(-t)} dt = [e^t]_{-\ln(2)}^x = e^x - \frac{1}{2}$$

$$\text{si } 0 \leq x \leq \ln(2): \quad F_5(x) = 0 + \int_{-\ln(2)}^0 f_5(t) dt + \int_0^x e^{-t} dt$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + [-e^{-t}]_0^x = \frac{3}{2} - e^{-x}$$

$$\text{si } x > \ln(2): \quad F_5(x) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$$

1-1 nécessaire
de distinguer selon
le signe de x
aussi

f_6 : ressemble beaucoup au f_3 - f_6 pareil également.

$$\text{primitive de } \frac{1}{2x^2}: \quad -\frac{1}{2x}$$

$$F_6(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

f_7 : f_7 pareil (cf ex 5) sinon faire les 2 états $\int_{-\infty}^0 f$ et $\int_0^{+\infty} f$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{(e^t+1)^2} = 1 - \frac{1}{e^{x+1}}$$

f_8 : f nulle en-dehors de $[1, e]$ où elle est continue de $\int_{-\infty}^{+\infty} f_8$ car et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_8(t) dt = \int_1^e \ln t dt = [t \ln t - t]_1^e = 1$$

$$F_8(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x \ln x - x + 1 & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ 1 & \text{si } x > e \end{cases}$$