Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille 1 : Révisions

Corrigé de l'exercice 1 : (E_6), (E_7) (E_9) et (E_{10}).
(E_6) :
L'équation $|2x+1| = x-4$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus elle est de la forme $|a| = b$. Donc (bien relire son cours !!), il faut distinguer deux cas : $b < 0$ et $b \geq 0$.
Rédaction : si $x-4 < 0$, alors l'équation est impossible puisque $|2x+1| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Si $x - 4 \geq 0$, càd $x \in [4, +\infty[$, on a alors les équivalences :
$|2x+1| = x-4 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 = x-4 \text{ ou} \\ 2x+1 = -(x-4) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -5 \notin [4, +\infty[\text{ ou} \\ x = 1 \notin [4, +\infty[\end{array} \right.$
Finalement, $\mathcal{S} = \varnothing$.

(E_7) :
L'équation $x = \sqrt{x} + 2$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.
Méthode 1, dans le même esprit que (E_8) : on veut élever au carré en partant de $\sqrt{x} = x-2$.
Le problème est que l'équivalence $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ est FAUSSE a priori.
Mais on sait qu'elle devient vraie dans certains cas, notamment si $a \geq 0$ et $b \geq 0$. On essaie de s'y ramener.
Il faut donc distinguer deux cas :
Comme $\sqrt{x} \geq 0$ pour $x \geq 0$, il ne peut pas y avoir de solutions si $x - 2 < 0$ càd si $0 \leq x < 2$.
Et si $x \geq 2$ ($\Leftrightarrow x \in [2, +\infty[$), alors comme $x-2 \geq 0$ et $\sqrt{x} \geq 0$, on a bien l'équivalence : $\sqrt{x} = x-2 \Leftrightarrow x = (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$. Après calculs ($\Delta = 9$, racines $1 \notin [2, +\infty[$, et $4 \in [2, +\infty[$), on peut conclure qu'il y a une unique solution $x = 4$.

Méthode 2 : on pose $X = \sqrt{x} \geq 0$.
Alors l'équation devient : $X^2 = X + 2$ à étudier pour les $X \geq 0$.
On trouve $\Delta = 9$, donc deux racines $X = 2 \geq 0$ et $X = -1 < 0$.
Il reste à repasser à x : on résout $\sqrt{x} = 2$ et on trouve $x = 4$.

(E_9) :
Ne pas confondre l'ensemble de définition avec l'ensemble où il peut y avoir des solutions ! Ici, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x^2 - 1| \geq 0$, l'équation est bien $\boxed{\text{définie sur } \mathbb{R}}$. Mais si $x - 5 < 0$ ($\Leftrightarrow x \in]-\infty, 5[$), l'équation ne peut avoir de solutions puisque $x - 5 < 0$ et $\sqrt{|x^2-1|} \geq 0$.
Puis si $x \geq 5$, on a $x - 5 \geq 0$ et $\sqrt{|x^2-1|} \geq 0$ d'où l'équivalence :
$\sqrt{|x^2-1|} = x-5 \Leftrightarrow |x^2-1| = (x-5)^2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = (x-5)^2$ (car pour $x \geq 5$, $x^2 - 1 \geq 0$) $\Leftrightarrow 10x - 26 = 0 \Leftrightarrow x = 2.6 < 5$.
L'équation n'a donc aucune solution.

(E_{10}) :
Attention : bien lire le cours sur les puissances réelles (nouveauté). Dans le secondaire, vous manipuliez des puissances entières : par exemple 3^n ou 3^{-n}. On peut définir des puissances réelles : 3^x à l'aide de la définition donnée dans le cours : $3^x = e^{x \ln(3)}$ La forme exponentielle est la "définition", mais la notation 3^x est agréable car permet de voir que toutes les formules sur les puissances entières restent vraies pour des puissances réelles. Il faut donc s'entraîner pour passer d'une forme à l'autre.
Ici, pour bien identifier l'ensemble de définition de l'équation, il fallait commencer par passer sous la forme exponentielle : $(E_{10}) \Leftrightarrow e^{2x\ln(3)} + e^{(x+1)\ln(3)} + 2 = 0$, équation définie sur $\mathbb{R}$ de manière visible (tout existe bien).
En revanche, pour voir la méthode de résolution que l'on va adopter, il est préférable de revenir à la forme initiale, pour pouvoir utiliser les formules connues sur les puissances : $(E_{10}) \Leftrightarrow (3^x)^2 + 3 \times 3^x + 2 = 0$.
Il reste à poser $X = 3^x$. On sait $X = e^{x\ln(3)} > 0$.
L'équation devient $X^2 + 3X + 2 = 0$. Trinôme qui admet deux racines $X = 1$ et $X = 2$ ($\Delta = 1$).
Il reste à revenir aux x : or $X = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow e^{x\ln(3)} = 1 \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln(1) \Leftrightarrow x = 0$ et $X = 2 \Leftrightarrow e^{x\ln(3)} = 2 \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$.
On trouve donc deux solutions : $\mathcal{S} = \{0, \frac{\ln(3)}{\ln(2)}\}$.

Corrigé partiel de l'exercice 2
Question 2 : Equations définies sur $\mathbb{R}$.
Se référer au cours : les équations résolues dans le cours sont de la forme $\sin(x) = \sin(\alpha)$ donc on essaie de s'y ramener.
a) $\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right.$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
D'où $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
Si on se restreint maintenant à $[-\pi, \pi[$, il reste à identifier les k qui conviennent : il y a seulement $k = 0$ dans les deux cas donc $\mathcal{S}_{[-\pi,\pi[} = \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$.

b) $\sin(6x) = 1 \Leftrightarrow \sin(6x) = \sin(\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 6x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right.$, avec $k \in \mathbb{Z}$, $\Leftrightarrow 6x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{6}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

(Attention de bien tout diviser par 6 ! Et c'est pour cette raison que je préfère la notation avec k plutôt que le modulo). On trouve $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Pour les solutions sur $[0, 2\pi[$, il reste à identifier les k qui conviennent : si $k = -1$, on trouve $\frac{-3\pi}{12} < 0$ qui ne marche pas (donc encore moins les $k \geq -1$), puis si $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ on trouve $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{21\pi}{12}$ qui conviennent, puis si $k = 6$, on trouve $\frac{25\pi}{12} > \frac{24\pi}{12} = 2\pi$ donc ne convient pas (et donc encore moins les $k \geq 6$).
Finalement, on obtient exactement 6 solutions : $\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{21\pi}{12}\}$.

Question 3. c)
Equation définie sur $\mathbb{R}$. On pose $X = \cos(x)$. Alors $X \in [-1, 1]$ et on étudie l'équation $2X^2 + 3X + 1 = 0$ sur $[-1, 1]$. On trouve $\Delta = 1$, deux racines $X_1 = -1 \in [-1, 1]$ et $X_2 = -\frac{1}{2} \in [-1, 1]$. Il reste maintenant à revenir aux x, en résolvant successivement l'équation $\cos(x) = -1$ (1) et $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ (2).
Or (1) $\Leftrightarrow \cos(x) = \cos(\pi) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pi + 2k\pi \text{ ou} \\ x = -\pi + 2k\pi \end{array} \right., k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
De même, (2) $\Leftrightarrow \cos(x) = \cos(\frac{2\pi}{3}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right., k \in \mathbb{Z}$.
Finalement, l'ensemble solution est : $\mathcal{S} = \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \cup \{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Question 4 :
(a) $\cos(5x) = 0 \Leftrightarrow \cos(5x) = \cos(\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi & \text{ou} \\ 5x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right., k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.
Donc sur $\mathbb{R}$, l'ensemble solution est $\{\frac{\pi+2k\pi}{10}, k \in \mathbb{Z}\}$.
Pour trouver les solutions x_k qui appartiennent à l'intervalle $]0, \pi[$, il reste encore à identifier les bonnes valeurs pour $k \in \mathbb{Z}$: Pour $k = 0$, $x_k = \frac{\pi}{10} \in]0, 2\pi[$, pour $k \leq -1$, $x_k \leq \frac{-\pi}{10} < 0$. Puis pour $k = 1$, $x_k = \frac{3\pi}{10}$ ... pour $k = 4$, $x_4 = \frac{9\pi}{10} \in]0, \pi[$, puis pour $k \geq 5$, $x_k \geq \frac{11\pi}{10} > \pi$. Il y a donc 5 solutions sur $]0, \pi[$: $\{\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{5\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}\}$.

Pour l'équation $\cos(nx) = 0$ le raisonnement est rigoureusement le même : on remplace le 5 par n.
On trouve comme ensemble solution sur $\mathbb{R}$: $\{\frac{\pi+2k\pi}{2n}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k \in \mathbb{Z}\}$. Sur $]0, \pi[$, les entiers k qui conviennent sont : $k = 0$, ..., $k = n - 1$ (les tester comme ci-dessus !). Il y a donc n solutions.

Question 5 :
a) Posons $X = 2x$; l'inéquation devient $cos(X) \leq 0$ dont l'ensemble solution sur $[0, 2\pi[$ est $\{X \in [\pi/2, 3\pi/2]\}$ et sur $\mathbb{R}$, est $\{X \in [\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}\}$. En revenant à x, on obtient donc : $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}$ / il existe $k \in \mathbb{Z}$, pour lequel $x \in [\pi/4 + k\pi, 3\pi/4 + k\pi]\}$.
b) commencer par résoudre l'inéquation sur $[-\pi, \pi[$: $\{x \in [-\pi, -5\pi/6] \cup [-\pi/6, \pi[\}$. Sur $\mathbb{R}$, il suffit de "rajouter" le $2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ quelconque ...

Corrigé de l'exercice 4 : questions 2,3,4 et 5

2. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $m \in \mathbb{R}^*$. ALors l'équation $mx^2 + x(2m - 1) - 2 = 0$ est un trinôme.
On pose $\Delta = (2m - 1)^2 + 4m = 4m^2 + 1 > 0$. Donc l'équation a deux solutions $x = \dfrac{-(2m-1) \pm \sqrt{4m^2+1}}{2m}$.
Donc si $m \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{S}_m = \{\dfrac{-(2m-1) - \sqrt{4m^2+1}}{2m}, \dfrac{-(2m-1) + \sqrt{4m^2+1}}{2m}\}$.
Et si $m = 0$, l'équation devient : $-x - 2 = 0$ qui a une unique solution $x = -2$. D'où $\mathcal{S}_0 = \{-2\}$.

3. Remarquer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation est un trinôme, donc il ne faut pas commencer par supposer $m \neq 0$ (aucune nécéssité ici).
On trouve $\Delta = m^2 - 4m - 4$.
Problème : comme m est un paramètre donc inconnu, on ne peut pas connaître le signe de Δ. Il faut donc distinguer des cas.
Etape intermédiaire : étudier le signe de $m^2 - 4m - 4$ en fonction de m.
On remarque que c'est de nouveau un trinôme (en m) : $\Delta' = 16 + 16 = 32 > 0$
donc deux racines $m_1 = \frac{4-\sqrt{32}}{2} = 2 - 2\sqrt{2}$ (puisque $\sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$), et $m_2 = 2 + 2\sqrt{2}$.
On en déduit le tableau de signe du trinôme en fonction de m :

m	$-\infty$		$2-2\sqrt{2}$		$2-2\sqrt{2}$		$+\infty$
signe$(m^2 - 4m - 4)$		+	0	-	0	+	

Finalement, si $m \in]-\infty, 2 - 2\sqrt{2}[\cup]2 + 2\sqrt{2}, +\infty[$, alors $\Delta > 0$, donc (bien revenir à la première équation en x ! C'est x l'incconue, pas m !) $\mathcal{S}_m = \{\frac{m\pm\sqrt{m^2-4m-4}}{2}\}$.
Si $m \in \{2 - 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}\}$, alors $\Delta = 0$ d'où $\mathcal{S}_m = \{\frac{m}{2}\}$.
Enfin, si $m \in]2 - 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}[$, $\Delta < 0$ donc $\mathcal{S}_m = \varnothing$.

4. Si $m^2-1 > 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $(m^2-1)x < m+1 \Leftrightarrow x < \frac{m+1}{m^2-1} = \frac{1}{m+1}$ (puisque $m^2-1 = (m+1)(m-1)$).

D'où $\mathcal{S}_m =]-\infty, \frac{1}{m-1}[$.
Si $m^2-1<0 \Leftrightarrow m \in]-1,1[$, $(m^2-1)x < m+1 \Leftrightarrow x > \frac{m+1}{m^2-1} = \frac{1}{m-1}$ d'où $\mathcal{S}_m =]\frac{1}{m-1}, +\infty[$.
Enfin, il reste à étudier le cas $m^2-1=0 \Leftrightarrow m \in \{-1,1\}$:
si $m=-1$ l'inéquation devient $0<0$: toujours fausse donc $\mathcal{S}_{-1} = \varnothing$.
et si $m=1$, l'inéquation devient $0<2$ toujours vraie donc $\mathcal{S}_1 = \mathbb{R}$.

5. Attention, puissance réelle ! Commencer par transformer l'écritude de 2^x pour lire l'ensemble de définition de l'équation ...
Récriture de l'équation : $(m+1)e^{x\ln(2)} = 1-m$. Equation définie sur $\mathbb{R}$.
Brouillon : pour isoler le x, on a envie de basculer le $m+1$ de l'autre côté pour obtenir $e^{x\ln(2)} = \frac{1-m}{m+1}$ puis d'appliquer le ln, pour faire descendre le x... Il faut donc distinguer des cas.
Premier cas $m=-1$. Alors l'équation devient $0=2$. Impossible donc $\mathcal{S}_{-1} = \varnothing$.

Deuxième cas : $m \neq -1$ donc $m+1 \neq 0$. Alors l'équation devient $e^{x\ln(2)} = \frac{1-m}{m+1}$.
Attention ! Pour pouvoir appliquer le ln, il faut encore distinguer des sous-cas.
Premier sous-cas : $\frac{1-m}{m+1} \leq 0$. ALors l'équation est impossible puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x\ln 2} > 0$. Donc dans ce sous-cas $\mathcal{S}_m = \varnothing$.

Deuxième sous-cas : $\frac{1-m}{m+1} > 0$. Alors $e^{x\ln(2)} = \frac{1-m}{m+1} \Leftrightarrow x\ln(2) = \ln(\frac{1-m}{m+1}) \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln(2)}\ln(\frac{1-m}{m+1})$ et donc dans ce cas, il y a une unique solution et $\mathcal{S}_m = \{\frac{1}{\ln(2)}\ln(\frac{1-m}{m+1})\}$.
Pour finir complètement la question, il reste à voir "concrètement" pour quels m, on a $\frac{1-m}{m+1} > 0$ et pour lesquels on a $\frac{1-m}{m+1} \leq 0$.
Outil : tableau de signe.
On trouve $\frac{1-m}{m+1} > 0 \Leftrightarrow m \in]-1,1[$.

Conclusion finale : si $m \in]-1,1[$, $\mathcal{S}_m = \{\frac{1}{\ln(2)}\ln(\frac{1-m}{m+1})\}$.
Sinon, $\mathcal{S}_m = \varnothing$.

Corrigé de l'exercice 5

1. Faire la différence pour trouver le signe (en mettant au même dénominateur) :
$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2+y^2-2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$ et même >0 puisque x et y sont distincts, donc $x-y \neq 0$.

   Ou rédaction moins élégante : partir du résultat et remarquer que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy}$ donc comme $xy > 0$, $(I) \Leftrightarrow x^2+y^2 > 2xy \Leftrightarrow (x-y)^2 > 0 \Leftrightarrow x-y \neq 0$. Donc pour x et y distincts on a bien l'inégalité demandée.
2. On fait la différence puis la quantité conjuguée : pour $x, y > 0$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{x+y} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{x+y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}} = \frac{2\sqrt{x}\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}} \geq 0$.

   Ou rédaction moins élégante : on élève le résultat voulu au carré, et on montre ce résultat ... Au dernier moment, on prend alors la racine, en justifiant bien que tout est positif (car alors $\sqrt{X^2} = |X| = X$), et que la racine carrée est croissante. Attention dans ce cas, à ne pas mettre d'équivalences !
3. Inégalité triangulaire avec $x = x-y+y$. On en déduit d'une part $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y| \leq 1+6 = 7$ et d'autre part $|x| \geq ||x-y|-|y|| = |y| - |x-y| \geq 4-1 = 3$.

Corrigé de la question 2 de l'exercice 6.
Méthode 1 : on dérive (gare aux calculs !)
f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour $x>1$, $f'(x) = -\frac{-1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}} > 0$ donc f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

Méthode 2 : à l'aide de la définition, par construction
Soit $1 < x \leq y$. Alors $0 < x-1 \leq y-1$, d'où $1-y < 1-x < 0$ (produit par -1< 0) d'où par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$, $(0 >) \frac{1}{1-y} \geq \frac{1}{1-x}$, et par croissance de l'exp sur $\mathbb{R}$, $e^{1/(1-y)} \geq e^{1/(1-x)}$ càd $f(y) \geq f(x)$. Donc f est croissante (cf définition)

Méthode 3 : à l'aide de la proposition du cours (méthode plus difficile ici) $x \mapsto 1-x$ est décroissante et négative sur $]1,+\infty[$, donc par composition avec la fonction inverse décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$, et enfin par composée avec la fonction exp croissante sur $\mathbb{R}$, on trouve bien que f est croissante sur $]1,+\infty[$.

Corrigé de l'exercice 7
Penser aux études de fonctions ...
1. On pose $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ pour $x \geq 1$. Le but est de montrer à l'aide d'un tableau de variations que f est positive sur $[1,+\infty[$.

Or f est dérivable sur $[1,+\infty[$, et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$. Pour trouver le signe de f', le mieux est de mettre au même dénominateur : soyez malin, et choisissez le bon ! En effet comme $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$ (pour $x \geq 0$), on peut réécrire $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$. Or par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 4$.
On en déduit (TV) que f admet sur $[1,+\infty[$ un minimum en $x = 4$. Il reste donc à vérifier que $f(4) \geq 0$ pour pouvoir conclure.
Or $f(4) = \sqrt{4} - \ln(4) = 2 - 2\ln(2) = 2(1 - \ln(2)) \geq 0$ puisque $1 \leq 2 \leq e \Rightarrow 0 \leq \ln(2) \leq 1$....

2. On pose $f(x) = e^{-x} - (1 - x + \frac{1}{2}x^2)$ sur $\mathbb{R}^-$, et on fait son TV pour en déduire son signe.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^-$ et $f'(x) = -e^{-x} + 1 - x$. Comme le signe ne sort pas, on redérive : $f''(x) = e^{-x} - 1$. Or $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow e^{-x} \geq 1 \Rightarrow f''(x) \geq 0$.
On en déduit que f' est croissante sur $\mathbb{R}^-$ (faire son TV !) donc comme $f'(0) = -1 + 1 = 0$, on obtient que f' est positive sur $\mathbb{R}^-$.
Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^-$ (faire son TV à la suite !) et comme $f(0) = 1 - 1 = 0$, on en déduit bien que f est positive sur $\mathbb{R}^-$. D'où le résultat.

Corrigé de la toute fin de l'exercice 8

Question 3. Imparité de f.
On a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1 + x^2} > 0$, donc on voit que f est définie sur $\mathbb{R}$, donc que $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il reste alors à montrer que $f(-x) = -f(x)$.
Méthode 1 : partir de $f(-x)$ et utiliser la quantité conjugée pour faire apparaitre l'autre (qui correspond à ce qui apparait dans $f(x)$)
Méthode 2 (plus simple ici, mais il faut y penser) : partir de $f(-x) + f(x) =$ ..... et arriver à 0 !

Corrigé de l'exercice 9

Rappel des deux propriétés incontournables de la partie entière :
1. on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ $(*)$.
2. si n est un entier tel que $n \leq x$, alors $n \leq \lfloor x \rfloor$, puisque $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand des entiers qui vérifie "$\leq x$".

2.(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On multiplie $(*)$ par 2 d'où $2\lfloor x \rfloor \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2$.
En particulier : $2\lfloor x \rfloor \leq 2x$: donc $2\lfloor x \rfloor$ est un entier (par définition), qui est inférieur à $2x$ donc $2\lfloor x \rfloor$ est inférieur à $\lfloor 2x \rfloor$ (rappel 2.). D'où $2\lfloor x \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor$

2.(b) Pour tout x, y réels, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$.
En sommant les inégalités de gauche : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$. Comme $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier, on en déduit $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.
En sommant les inégalités de droite : $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ d'où a fortiori $\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. Or si n est un entier, $n < 2 \Rightarrow n \leq 1$ d'où le résultat.

Corrigé de l'exercice 10, question 1.

1. (a) $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 3x - 1 \neq 0 \text{ et } \frac{x+2}{3x-1} > 0\}$. Pour la 2e condition, faire un tableau de signe.
On trouve $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$.
Pour dériver : une astuce aurait pu être de séparer le ln (a/b) en ln(a)-ln(b), mais attention ici ce n'est pas possible car sur $]-\infty, -2[$ les a et b correspondants sont strictement négatifs.
On calcule : $f'(x) = 1 \times \ln(\frac{x+2}{3x-1}) + x\dfrac{\frac{(3x-1)-3(x+2)}{(3x-1)^2}}{\frac{x+2}{3x-1}}$.

(b) $\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 1 \geq 0 \text{ et } 2x + 3 \geq 0 \text{ et } \sqrt{2x+3} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x + 3 > 0\} =]-\frac{3}{2}, +\infty[$.
On calcule en remarquant que $\frac{1}{\sqrt{2x+3}} = (2x + 3)^{-1/2}$ et en utilisant que $(u^{-1/2})' = -\frac{1}{2}u'u^{-1/2-1}$:
$g'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - (-\frac{1}{2}) \times 2 \times (2x + 3)^{-1/2-1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{(2x+3)^{3/2}}$.
(pour une écriture différente, utiliser $u^{3/2} = u^{1/2} \times u = \sqrt{u}u = (\sqrt{u})^3$...).

(c) $\mathcal{D}_h = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \text{ et } x \neq 0\} = \mathbb{R}_+^*$. (attention de ne pas lire $\ln(x + 1)$ mais bien $\ln(x) + 1$).
On calcule en utilisant que $(u^2)' = 2u'u$: $h'(x) = 2\frac{1}{x}(\ln x + 1)e^{1/x+2x} + (\ln x + 1)^2(-\frac{1}{x^2} + 2)e^{1/x+2x}$.

(d) $\mathcal{D}_u = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 - x^2 \geq 0\}$ (car le cosinus est défini sur $\mathbb{R}$). Or $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. (variante : $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$ et faire un tableau de signe !)
On trouve $\mathcal{D}_u =]-1, 1[$. On verra plus tard qu'il y aura un problème de dérivabilité en -1 et 1 à cause de la racine, mais dans ce chapitre, le but est de calculer !
Rappel de la dérivée d'une composée dans le cas général : $(f(u))' = u' \times f'(u)$
Donc on calcule : $u'(x) = \frac{1}{2}\frac{-2x}{(\sqrt{1-x^2})}(-\sin(\sqrt{1 - x^2}))$.

(e) $\mathcal{D}_v = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 5 \neq 0 \text{ et } \frac{x}{x^2+5} \geq 0\} = [0, +\infty[$. Même problème de dérivabilité en 0.
On calcule : $v'(x) = \frac{1}{2}\dfrac{\frac{1\times x^2+5-x(2x)}{(x^2+5)^2}}{\sqrt{\frac{x}{x^2+5}}}$.

2. (a) Equation définie sur $\mathbb{R}$. $1 - e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = 1 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(b) g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $g'(x) = -[e^{-2x} + (x+1)(-2)e^{-2x}] = (2x+1)e^{-2x}$ donc du signe de $2x+1$.
Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $2x+1 \geq 1 \geq 0$, donc $g'(x) \geq 0$. g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0) = 0$ donc g est positive sur $\mathbb{R}^+$.

(c) f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la première question, et elle est également dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour $x > 0$, $f'(x) = ... = \frac{2xg(x)}{(1-e^{-2x})^2}$ donc du signe de $xg(x)$. Pour $x > 0$, on obtient donc $f'(x) > 0$

(d) Sur $\mathbb{R}$, l'étude du signe de g est plus difficile.
Signe de g' : $2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1/2$ donc g admet un minimum en $-1/2$ de valeur $g(-1/2) = 1 - \frac{1}{2}e < 0$ (dessiner le TV !) On remarque alors que $g(0) = 0$ donc à droite de $-1/2$, on identifie bien le signe de g. A gauche de $-\frac{1}{2}$ c'est plus difficile : en effet la limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$ donc par produit (et avec le signe - devant), $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, donc le signe de g ne sera pas constant (on peut aussi essayer $g(-1) = ...1 > 0$ donc difficile de deviner où g va s'annuler) Il faut alors appliquer un théorème (vu l'an dernier) pour savoir que g va s'annuler en un unique réel, que l'on va noter α avec $\alpha \leq -\frac{1}{2}$ (et $\alpha \geq -1$). Le tableau de signe de g va alors dépendre de α : g est positive sur $]-\infty, \alpha]$, puis négative sur $[-\alpha, 0]$, et enfin de nouveau positive sur $[0, +\infty[$.
Le TV de f dépendra alors de α (ne pas oublier de prendre en compte le signe de x pour obtenir celui de $xg(x)$, càd celui de $f'(x)$ ....)

3. Pour cette question, si vous l'avez cherchée, je vous propose de me montrer votre brouillon lors d'une pause ...

4. Quelques indications pour la question 4. :
pour g, penser à la forme exponentielle ... puis pour le signe de g', il faudra poser une fonction auxiliaire et trouver son signe via un TV.
Pour h : résoudre à part l'inéquation $e^x - e^{-x} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x > 0$ pour obtenir l'ensemble de définition.
Pour u : résoudre $x - \sqrt{x} \geq 0$ en factorisant puisque comme $x \geq 0$, $x = (\sqrt{x})^2$. D'où $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$...
On trouve $\mathcal{D}_u = [1, +\infty[$.
Pour v commencer par étudier la fonction $x \mapsto x - \ln x$.

Quelques éléments de correction pour la question 4.

(a) $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \text{ et } 2 - \ln x \geq 0\} =]0, e^2]$. $f'(x) = \frac{-1/x}{2\sqrt{2-\ln x}} < 0$

(b) Attention, puissance réelle ! $x^{1+1/x} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln x}$ donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = (-\frac{1}{x^2}\ln x + (1+\frac{1}{x})\frac{1}{x})e^{(1+\frac{1}{x})\ln x} = \dfrac{-\ln x + x + 1}{x^2}e^{(1+\frac{1}{x})\ln x}$ donc $g'(x)$ est du signe de $h(x) = -\ln x + x + 1$. Il faut donc faire le TV de h sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = -\frac{1}{x} + 1 = \frac{-1+x}{x}$ et $-1 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Donc h admet un min en $x = 1$ de valeur $h(1) = 2 \geq 0$. Donc h positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc g' positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g croissante sur $\mathbb{R}_+^*$...

(c) $\mathcal{D}_h = \{x \in \mathbb{R} \,/\, ^x - e^{-x} > 0\}$. Or $e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > -x$ (stricte croissance du ln) $\Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ d'où $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}_+^*$. et $h'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} > 0$ d'après ce qui précède.

(d) ** $\mathcal{D}_u = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0 \text{ et } x - \sqrt{x} \geq 0\}$. Or si $x \geq 0$, $x - \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$ donc $x - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$ (puisque $x \geq 0$). D'où $\mathcal{D}_u = [1, +\infty[$. Et $u'(x) = \dfrac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x - \sqrt{x}}} = \dfrac{2\sqrt{x} - 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x - \sqrt{x}}} \geq 0$ car $x \geq 1$ donc $2\sqrt{x} \geq 2$ et $2\sqrt{x} - 1 \geq 0$.

(e) ** $\mathcal{D}_v = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \text{ et } x - \ln x \neq 0\}$ Si on étudie $f : x \mapsto x - \ln x$, sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, on voit que f admet un min en 1 et $f(1) > 0$ donc f ne s'annule pas. Finalement, $\mathcal{D}_v = \mathbb{R}_+^*$ et $v'(x) = \frac{1\times(x - \ln x) - x(1-\frac{1}{x})}{(x-\ln x)^2} = \dfrac{-\ln x + 1}{(x - \ln x)^2}$ donc $g'(x)$ du signe de $-\ln x + 1$. Or $-\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq lnx \Leftrightarrow e^1 \geq x$ d'où g admet un maximum en $x = e$ de valeur $g(e) = \frac{e}{e-1}$.

Corrigé de l'exercice 11

1. $\mathcal{D}_\varphi = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 + x > 0 \text{ et } 1 - x > 0 \text{ et } \ln(1-x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > -1,\, x < 1 \text{ et } 1 - x \neq 1\} =]-1, 0[\cup]0, 1[$.
2. $\lim\limits_{x\to-1} 1 + x = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to-1} \ln(1+x) = -\infty$, et comme $\lim\limits_{x\to-1} \ln(1-x) = \ln 2 > 0$, par quotient, $\lim\limits_{x\to-1} \varphi(x) = -\infty$.
Asymptote verticale en $x = -1$. De même, $\lim\limits_{x\to1} \ln(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1} \ln(1+x) = \ln 2$, d'où $\lim\limits_{x\to1} \varphi(x) = 0$.
3. a) Limite usuelle : $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ puis en posant $X = -x$, on a d'une part $\lim\limits_{x\to0} X = 0$ et d'autre part, $\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1+X)}{-X} = -\frac{\ln(1+X)}{X}$ d'où $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{X\to0} -\frac{\ln(1+X)}{X} = -1$.
b) Il suffit de remarquer que $\varphi(x) = \dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\ln(1-x)}{x}}$ d'où par quotient, $\lim\limits_{x\to0} \varphi(x) = \frac{1}{-1} = -1$.

4. (a) φ est dérivable sur $\mathcal{D}_\varphi$ et $\varphi'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x}\ln(1-x) - \ln(1+x)(-\frac{1}{1-x})}{(\ln(1-x)^2)} = \dfrac{\frac{(1-x)\ln(1-x)+(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)(1-x)}}{(\ln(1-x)^2)}$.

   On conclut en remarquant que $(1+x)(1-x) = (1-x^2)$ et que $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{b\times c}$.

   (b) h dérivable sur $]-1,1[$ et $h'(x) = -\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x} + \ln(1+x) + (x+1)\frac{1}{x+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$.

   (c) Inéquation définie sur $]-1,1[$. Puis par stricte croissance de l'exp, $\ln(1-x) < \ln(1+x) \Leftrightarrow 1-x < 1+x$ $\Leftrightarrow 0 < 2x \Leftrightarrow 0 < x$.

   (d) h admet un minimum en 0 et $h(0) = 0$ donc h positive sur $]-1,1[$.

   (e) $\lim_{x\to 1}(1+x)\ln(1+x) = 2\ln(2)$. Pour l'autre moitié, poser $X = 1-x$, en remarquant que $\lim_{x\to 1} X = 0^+$. Alors $\lim_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x) = \lim_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0$ d'après les croissances comparées. Donc $\lim_{x\to 1} h(x) = 2\ln 2$.

   (f) $h \geq 0$ sur $]-1,1[$, et de plus $1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, donc φ croissante. (Dans le TV, la double barre est facultative pour φ en 0 car la limite est -1 en 0^+ et en 0^- : φ se prolonge par continuité en 0).

5. Pour $x \in \mathcal{D}_\varphi$: $\varphi(x) = -2 \Leftrightarrow \ln(1+x) = -2\ln(1-x) \Leftrightarrow \ln(1+x) = \ln(1/(1-x)^2) \Leftrightarrow (1+x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\Leftrightarrow (1+x)(1-x)^2 = 1 \Leftrightarrow -x - x^2 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x(-1-x+x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ car $x \neq 0$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$).
   Deux racines éventuelles : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Or $4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 3 < 1+\sqrt{5} \Rightarrow 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et donc $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathcal{D}_\varphi$. Mais $-3 < \sqrt{5} < -2 \Rightarrow -2 < 1-\sqrt{5} < -1 \Rightarrow -1\frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2} < 0$ et donc $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \in \mathcal{D}_\varphi$.
   Conclusion : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est l'unique solution de cette équation.