Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Applications bijectives

Corrigé exercice 1

Soit k et k' des entiers tels que $f(k) = f(k')$. Alors $2k + 1 = 2k' + 1$ d'où $k = k'$.
D'où l'injectivité.
(ou remarquer que f est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.)
On remarque ensuite que les images sont des entiers impairs : en particulier 2 n'a pas d'antécédent.
Donc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ n'est pas surjective.
Ou écrire : $f(\mathbb{N}) = \{\text{entiers impairs}\} \subsetneq \mathbb{N}$.

Corrigé exercice 6

1. $f(1, -1, -1) = (0, 0, 0) = f(0, 0, 0)$, pourtant $(1, -1, -1) \neq (0, 0, 0)$ donc f n'est pas injective.
2. comme pour tout (x, y, z), $f(x, y, z) = (x + y, x + z, (x + y) + (x + z))$ on devine que (1,0,2) n'aura pas d'antécédents (puisque $1 + 0 = 1 \neq 2$). Résoudre alors le système $f(x, y, z) = (1, 0, 2)$ pour montrer qu'il n'y a pas d'antécédents à (1,0,2).

Corrigé exercice 8 :2.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$.
Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus ; g est continue sur $\mathbb{R}$, et $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. D'où $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. On en déduit bien que g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Il reste à déterminer $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Soit $y \in \mathbb{R}$: trouvons l'unique antécédent $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = y$ (car alors $x = g^{-1}(y)$).
On résout : $g(x) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 2y \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x$.
On pose $X = e^x > 0$ d'où $X^2 - 2yX - 1 = 0$.
$\Delta = 4y^2 + 4 > 0$. Deux racines $X_1 = \frac{2y-\sqrt{4(y^2+1)}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1}$ et $X_2 = y + \sqrt{y^2 + 1}$.
Ne pas croire que c'est contradictoire avec la bijection ! Pour l'instant, on n'a pas encore x mais seulement X. Donc il faut encore voir quelle est la racine qui ne convient pas. Or $X_1 \leq 0$, preuve ci-dessous, donc comme on sait qu'il existe une solution (car g bijective), on obtient $X_2 > 0$ (ou montrer que $X_2 > 0$).
D'où $x = \ln(X_2) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.
On en déduit $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

preuve $X_1 \leq 0$: Remarquer que si $y \leq 0$, c'est évident. Dans le cas $y > 0$, on peut passer par quantité conjuguée.
Ou construire : $\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2} = |y| \geq y$ (que y soit positif ou négatif, cette inégalité est vraie !) d'où le résultat.
Ou encore, réaliser (cf chapitre 1) que $\sqrt{y^2 + 1} > |y| \Leftrightarrow -\sqrt{y^2 + 1} < y < \sqrt{y^2 + 1}$
ce qui donne simultanément $X_1 < 0$ et $X_2 > 0$.

Corrigé exercice 9 : 2.

Ici, on ne peut pas utiliser la méthode via le TV pour montrer la bijectivité ! ! (car on est dans $\mathbb{R}^2$, pas dans $\mathbb{R}$). Il faut donc tout montrer d'un coup via la phrase de définition de la bijectivité avec les quantificateurs.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Il faut montrer qu'il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g((x, y)) = (a, b)$.
On résout donc le système $\left\{\begin{array}{ll} x - y & = a \\ x + 3y & = b \end{array}\right.$. En une étape du pivot, il est triangulaire : on constate alors qu'il est de Cramer. Il y aura donc une unique solution : donc g est bijective.
On finit alors la résolution pour trouver g^{-1}. On trouve $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}(b + 3a) \\ y = \frac{1}{4}(b - a) \end{array}\right.$. D'où $g^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(a, b) \mapsto (\tfrac{1}{4}(b + 3a), \tfrac{1}{4}(b - a))$$

Corrigé fin exercice 12

3 Supposons que $g \circ f$ est injective sur E et f surjective de E dans F.
Montrons que g est injective : soit $(y_1, y_2) \in F^2$ tels que $g(y_1) = g(y_2)$ (*). But : montrer que $y_1 = y_2$.
Comme f est surjective de E dans F, il existe $x_1 \in E$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $x_2 \in E$ tel que $f(x_2) = y_2$.
Alors (*) implique que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ càd $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Comme $g \circ f$ est injective, on obtient $x_1 = x_2$ ce qui implique $f(x_1) = f(x_2)$ càd $y_1 = y_2$.

4 Supposons que $g \circ f$ est injective de E dans G et g surjective sur F.
Montrons que f est surjective de E dans F : soit $y \in F$. But : trouver $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Posons $z = g(y)$. Alors $z \in G$ et comme $g \circ f$ est surjective, on peut trouver $a \in E$ tel que $g \circ f(a) = z$.
Ce qui donne $g(f(a)) = g(y)$ vu la définition de z.
Comme g est injective, on en déduit $f(a) = y$ donc $x = a$ convient.

Corrigé exercice 14

Comme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective, on a $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donc $\forall y \in \mathbb{R}$, $-y \in \mathbb{R}$.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrons que $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.
L'idée est de faire apparaître du f pour utiliser l'imparité de f !
Or par bijectivité de f, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ (càd $x = f^{-1}(y)$).
D'où $f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x))$ (par imparité de f : $f(-x) = -f(x)$)
$= -x$ (puisque $f^{-1}of = id$)
$= -f^{-1}(y)$ par définition du x ci-dessus.

Corrigé exercice 16

S'inspirer de l'exercice 12 pour montrer que g est injective et surjective donc bijective.
Alors par composition de fonctions bijectives, $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective ... de même pour h.

Corrigé exercice 17 `inspiré d'eml E 2019`

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}$ donc du signe de $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$. Faire un tableau de signe (ou résoudre $t^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow t^2 > 1 \Leftrightarrow t > 1$ ou $t < -1$).
   Bref ! Donc f croissante sur $]-\infty, -1]$, décroissante sur $[-1, 0[$. Double barre en 0, puis f décroissante sur $]0, 1]$ et croissante ensuite.
   Pas de FI pour les limites (donner un détail) : $\lim_{x \to -\infty} f(t) = -\infty$, $f(-1) = -2$, $\lim_{t \to 0^-} f(t) = -\infty$, $\lim_{t \to 0^+} f(t) = +\infty$, $f(1) = 2$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.
2. f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[) = [2, +\infty[$.
3. D'après le théorème de la bijection, g est continue et strictement croissante (comme f) sur $[2, +\infty[$, et $g([2, +\infty[) = [1, +\infty[$.
4. Soit $y \in [2, +\infty[$, on cherche l'unique $t \in [1, +\infty[$ tel que $f(t) = y$.
   Or $f(t) = y \Leftrightarrow \frac{t^2+1}{t} = y \Leftrightarrow t^2 + 1 = ty \Leftrightarrow t^2 - ty + 1 = 0$. On pose $\Delta = y^2 - 4 \geq 0$ (puisque $y \geq 2$). Donc l'équation admet pour racines (elles ne sont pas distinctes dans le cas $y = 2$) $\frac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2}$. Or on sait qu'il n'y a qu'une seule racine dans $[1, +\infty[$ (par bijectivité), et comme $\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2} \geq \frac{y+0}{2} \geq 1$, c'est celle-ci la bonne.
   Finalement, $g : [2, +\infty[\to [1, +\infty[$ est définie par $g(y) = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$.
5. Récurrence, cas $n = 1$, u_1 existe et $u_1 = 1 \geq 1$ par hypothèse.
   Supposons que pour un certain $n \geq 1$, u_n existe et $u_n \geq 1$. Alors $n^2 u_n \geq n^2 \geq 1$ donc $n^2 u_n \neq 0$ et u_{n+1} existe, et de plus $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} \geq 1 + 0$ par H.R. Conclure.
6.
```
def f(n):
    u=1
    for k in range(2,n+1):
        u=u+1/((k-1)**2)*u)
    return u
```
   Variante de la boucle for :
```
for k in range(1,n):
    u=u+1/((k**2)*u)
```
   en effet, dans la première boucle, comme on fait partir k de 2, c'est que l'on calcule u_k à l'étape k : or $u_k = u_{k-1} + \frac{1}{(k-1)^2 u_{k-1}}$.
   Dans la 2e boucle proposée,k part de 1 et on calcule u_{k+1} à l'étape k ....
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2 u_n} \geq 0$ donc la suite est croissante. On admet qu'elle converge vers un réel ℓ.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) ... + (u_{n+1} - u_n) = u_{n+1} - u_1$[somme télescopique] $= u_{n+1} - 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell - 1$. D'où la convergence de la suite v vers le réel $\ell - 1$.

Corrigé exercice 14 : unicité

Supposons qu'il existe deux fonctions g et h qui conviennent : donc pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$,
$g(x)\ln(g(x)) = x = h(x)\ln(h(x))$ càd $f(g(x)) = x = f(h(x))$. Par bijectivité de f, on peut appliquer f^{-1} :
pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$, $f^{-1}(f(g(x))) = f^{-1}(f(h(x)))$ d'où $g(x) = h(x)$.

On aurait aussi pu rédiger autrement la question de l'existence, pour avoir directement l'unicité :
une fois que l'on a justifié la bijectivité de f et donc l'existence de f^{-1}, on aurait pu simplement écrire : or pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$, $f(g(x)) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(g(x))) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow g(x) = f^{-1}(x)$. Finalement $g = f^{-1}$ est l'unique solution.