Quelques Corrigés d'Exercices "Applications linéaires"

$\longrightarrow$ Deux exercices supplémentaires en fin de corrigé

Corrigé de l'exercice 1

f_1 et f_3 sont linéaires mais pas f_2 du fait du produit x_1x_2.

Corrigé partiel de l'exercice 3

Pour la linéarité : bien poser $x = (...)$, $y = (....)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ecrire alors $\lambda x + y = (....)$ pour arriver à calculer $f(\lambda x + y)$.
Il reste alors à séparer les triplets ou couples pour reconnaitre $\lambda f(x) + f(y)$
OU partir simultanément de $\lambda f(x) + f(y)$ en regroupant tout, pour retomber sur $f(\lambda x + y)$.
Si vous avez une difficulté, vous pourrez me montrer votre brouillon dans la semaine.

Noyaux :

Rédaction pour f : poser $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $(x, y, z) \in Ker(f) \Leftrightarrow f((x, y, z)) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z & = 0 \\ y + z & = 0 \\ x + 2y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases}$ (après opération L_3 est redondante) $\begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}$ D'où $Ker(f) = \{(2z, -z, z), z \in \mathbb{R}^3\} = Vect((2, -1, 1))$.
Il reste à faire le blabla pour dire que $((2, -1, 1))$ est une base du noyau.

$Im(f) = Vect(f((1, 0, 0)), f((0, 1, 0)), f((0, 0, 1))) = Vect((1, 0, 1), (1, 1, 2), (-1, 1, 0)) = Vect((1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 1))$ (marquer les opérations !) =Vect((1,0,1),(0,1,1)) et les deux vecteurs qui restent sont non colinéaires donc on peut s'arrêter ... Reste le blabla à faire !

Donc f n'est ni injective (car $ker(f) \neq \{0\}$) ni surjective (car $im(f) \neq \mathbb{R}_3$ puisqu'une base de $Im(f)$ ne contient que 2 vecteurs et pas 3) !

Pour g : si on choisit z comme inconnue auxiliaire, on trouve $Ker(g) = \{(3z, 2z, z), z \in \mathbb{R}\}$ et après acoir calculé les images de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on trouve :$Im(g) = Vect((1, 0), (-1, 1), (-1, -2)) = Vect((1, 0), (0, 1), (0, 2)) = Vect((1, 0), (0, 1)) = \mathbb{R}^2$.
Donc g est surjective mais pas injective.

Enfin, pour h : $Ker(h) = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, 0))$, et $Im(h) = Vect((0, 0), (1, 0)) = Vect((1, 0))$.
On peut remarquer que $Im(h) = Ker(h)$ ... car en fait $hoh = 0$ (à vérifier)

Corrigé de l'exercice 5

1. Montrons que la famille $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (0, 1, 1))$ est une base en montrant que pour tout $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\exists!(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a(1, 1, 1) + b(1, 2, 3) + c(0, 1, 1) = (x, y, z)$.
   Ainsi, on aura en même temps les coordonnées de $\vec{x}$ dans cette base !
   On obtient le système (préciser les opérations à droite !) :
   $\begin{cases} a + b & = x \\ a + 2b + c & = y \\ a + 3b + c & = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b & = x \\ b + c & = y - x \\ 2b + c & = z - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b & = x \\ b + c & = y - x \\ -c & = z - 2y + x \end{cases}$ système de cramer, donc la famille est bien une base.
   On finit la résolution pour obtenir les coordonnées : $\begin{cases} a = x + y - z \\ b = z - y \\ c = -x + 2y - z \end{cases}$
   d'où pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) = (x + y - z)(1, 1, 1) + (z - y)(1, 2, 3) + (-x + 2y - z)(0, 1, 1)$
2. Il suffit d'utiliser "le bon théorème" du cours (section 3.1), pour obtenir directement que g ainsi définie existe bien et est unique.
   Et pour obtenir l'expression de $g(x, y, z)$, on utilise l'écriture de (x, y, z) dans la base $((1, 1, 1), (1, 2, 3), (0, 1, 1))$.
   En effet, on a vu que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) = (x+y-z)(1, 1, 1)+(z-y)(1, 2, 3)+(-x+2y-z)(0, 1, 1)$ d'où par linéarité de g :
   $g((x, y, z)) = (x + y - z)g((1, 1, 1)) + (z - y)g((1, 2, 3)) + (-x + 2y - z)g((0, 1, 1))$
   $= (x+y-z)(0, 1, 1)+(z-y)(1, 1, 1)+(-x+2y-z)(1, 2, 3) = (y-x, -x+4y-2z, -2x+6y-3z)$. Ici, l'expression de g n'était pas demandée, mais selon la méthode choisie pour la question 3., elle était nécessaire ...
3. Plusieurs méthodes :
   a) de loin la plus rapide : réaliser que la famille des images $(0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 3)$ est la même que la famille du 1. (à l'ordre près des vecteurs) donc est une base de $\mathbb{R}^3$ et on conclut avec le dernier théorème du chapitre.
   b) sinon, on détermine $Ker(g)$ et $Im(g)$ et on vérifie que $Ker(g) = \{(0, 0, 0)\}$ et $Im(g) = \mathbb{R}^3$, pour en déduire que g est injective et surjective donc bijective.

Corrigé de l'exercice 7 question 3

On suppose f surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc pour tout $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $f(M) = N$ càd tel que $AM = N$.
Or (définition) A est inversible dès que l'on peut trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I$.
Il suffit donc d'utiliser le résultat de surjectivité avec $N = I$: on obtient bien l'existence d'une matrice M telle que $AM = I$. Donc A est inversible.

Corrigé du bonus de l'exercice 8

$Ker(h) = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \text{ tels que } h(P) = (0,0,0)\}$. Soit $P \in \mathbb{R}_3[x]$ défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Alors $h(P) = (0,0,0) \Leftrightarrow (P(0), P'(0), P''(0)) = (0,0,0) \Leftrightarrow (d, c, 2b) = (0,0,0) \Leftrightarrow b = c = d = 0 \Leftrightarrow P : x \mapsto ax^3$. D'où $Ker(h) = \{x \mapsto ax^3, a \in \mathbb{R}\} = Vect(x^3)$. Comme le vecteur $x \mapsto x^3$ est non nul, il forme de plus une famille libre, donc une base de $Ker(h)$.

Corrigé de l'exercice 9

Linéarité similaire à celle de l'exo 8 (rédigé en classe).
Pour le noyau, poser $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$.

Alors $h(P) = (0,0,0) \Leftrightarrow (P(0), P(1), P(2)) = (0,0,0) \Leftrightarrow (d, a+b+c+d, 8a+4b+2c+d) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = \frac{1}{2}c \\ b = -\frac{3}{2}c \end{cases} \Leftrightarrow$
$P : x \mapsto \frac{1}{2}cx^3 - \frac{3}{2}cx^2 + cx$. D'où $Ker(h) = \{x \mapsto \frac{1}{2}cx^3 - \frac{3}{2}cx^2 + cx, c \in \mathbb{R}\} = Vect(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x)$. Comme le vecteur $x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$ est non nul, il forme de plus une famille libre, donc une base de $Ker(h)$.
Variante : $P \in Ker(h) \Leftrightarrow$1,2, et 3 sont racines de $P \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)$ divise P. Comme $deg(P) \leq 3$,
$P \in Ker(h) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ tel que $P = cx(x-1)(x-2)$. D'où $Ker(h) = \{cx(x-1)(x-2), c \in \mathbb{R}\}$.

Pour l'image de h : $Im(h) = Vect(h(1), h(x), h(x^2), h(x^3))$ puisque $(1, x, x^2, x^3)$ famille génératrice de $\mathbb{R}_3[x]$. D'où $Im(h) = Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,1,4),(0,1,8)) = Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,0,2),(0,0,6)) = Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,0,1)) = Vect((1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)) = Vect((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbb{R}^3$. (ne pas faire comme moi : bien marquer les opérations !)
Bref, h est surjective, mais n'est pas injective car $Ker(h) \neq \{0\}$.

Corrigé de la question 4 de l'exercice 10 Montrer que f endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$: alors $deg(P) \leq n$ donc $deg(2P) \leq n$ et $deg(P') \leq n-1$, d'où $deg(xP') = 1 + deg(P') \leq n$, et par somme $deg(f(P) \leq n)$. On a bien $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Pour la linéarité, rien ne change : soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\lambda P + Q)(x) = 2(\lambda P + Q)(x) - x(\lambda P + Q)'(x) = \lambda 2P(x) + 2Q(x) - x(\lambda P'(x) + Q'(x)$ par linéarité de la dérivation
$= \lambda f(P)(x) + f(Q)(x)$.

Détermination de l'image de f : Posons $(U_0, U_1, ..., U_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$: donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, U_i est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $U_i(x) = x^i$.
Alors $Im(f) = Vect(f(U_0), f(U_1), ..., f(U_n))$ Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(U_0)(x) = 2U_0(x) - xU_0'(x) = 2$, $f(U_1)(x) = 2U_1(x) - xU_1'(x) = x$, ..., $f(U_i)(x) = 2x^i - ix^{i-1} = (2-i)x^i$ ... , $f(U_n)(x) = (2-n)x^n$. D'où finalement, $Im(f) = Vect(2, x, 0, -x^3, ..., (2-n)x^n) = Vect(U_0, U_1, U_3, ..., U_n)$. On remarque qu'il manque U_2 dans le vect de l'image, donc on peut "sentir" que f ne sera pas surjective puisque $Im(f) \neq \mathbb{R}_n[x]$.

Corrigé de l'exercice 11. Méthode 1 : montrer que la famille $((x+1)^2, x^2+1, x^2)$ est génératrice puis libre.
Autrement dit, commencer par montrer que $Vect((x+1)^2, x^2+1, x^2) = Vect(2x+1, 1, x^2) = Vect(2x, 1, x^2) = Vect(x, 1, x^2) = \mathbb{R}_2[x]$ (bien marquer les opérations) puis poser $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a(x+1)^2 + b(x^2+1) + cx^2 = 0$
En déduire $(a+b+c)x^2 + 2ax + (a+b) = 0$, pour passer au système (identifier les coefficients) et arriver à $a = b = c = 0$.

Méthode 2 : poser $P = ax^2 + bx + c$, et montrer qu'il existe un unique triplet $(\lambda, \mu, \nu))$ tel que $P = \lambda(x+1)^2 + \mu(x^2+1) + \nu(x^2)$.
On arrive alors à $(\lambda + \mu + \nu)x^2 + 2\lambda x + (\lambda + \mu) = ax^2 + bx + c$... Système de Cramer, donc unique solution, donc la famille $((x+1)^2, x^2+1, x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

En utilisant le dernier théorème du chapitre (frontière du programme), comme $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et que l'image de cette base est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, f est bijective, donc est un isomorphisme.
En particulier f est injective donc $Ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, et f est surjective donc $Im(f) = \mathbb{R}_2[x]$.

Corrigé de l'exercice 14, question 2 et 3

3. $Ker(f) = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, f(u) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$ Donc $u \in Ker(f) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2u_n = 0$
$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n \Leftrightarrow u$ est géométrique de raison 2 $\Leftrightarrow \exists u_0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n u_0 \Leftrightarrow \exists u_0$ tel que $u = (u_0 2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Finalement, $Ker(f) = \{(u_0 2^n)_{n\in\mathbb{N}}, u_0 \in \mathbb{R}\} = \{u_0(2^n)_{n\in\mathbb{N}}, u_0 \in \mathbb{R}\} = Vect((2^n)_{n\in\mathbb{N}})$. Or la suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas la suite nulle, donc forme une famille libre, donc finalement est une base de $Ker(f)$.

4. f est surjectif si : $\forall v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il existe une suite u telle que $v = f(u)$ càd telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - 2u_n$.
Soit v une suite réelle.
Construisons u par récurrence forte, de telle manière que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = v_n + 2u_n$.
On pose $u_0 = 0$, donc u_0 existe bien.
Puis pour u_1, on pose $u_1 = v_0 + 2u_0$. u_1 est ainsi bien défini.
Supposons avoir ainsi construit tous les termes de la suite u_0, u_1 jusqu'à u_n.
On pose alors $u_{n+1} = v_n + 2u_n$, qui est ainsi bien défini (puisque la suite v est fixée).
Conclusion : on a ainsi construit par récurrence une suite (qui existe donc !) et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = v_n + 2u_n$ càd telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - 2u_n$.
Avec u cette suite, on a bien $f(u) = v$.
Donc f est bien surjective de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Corrigé de l'exercice 17, question 3.

On commence par l'implication $\Rightarrow$: Supposons que $Ker(f) = Ker(f^2)$. Il faut montrer que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$.
Par double inclusion : on sait déjà que $O_E \in Ker(f)$ et $0_E \in Im(f)$, car $Ker(f)$ et $Im(f)$ sev de E (ou rappeler $f(0_E) = 0_E$...)
Soit maintenant $x \in Ker(f) \cap Im(f)$. But : mq $x \in \{0_E\}$ c'est-à-dire mq $x = 0_E$.
$x \in Ker(f)$ donc $f(x) = 0$, et $x \in Im(f)$ donc $\exists a \in E$ tel que $x = f(a)$.
Mais alors en combinant les deux, on obtient $f(f(a)) = f(x) = 0$ d'où $a \in Ker(f \circ f)$.
Par hypothèse, comme $Ker(f^2) = Ker(f)$, on en déduit $a \in Ker(f)$.
D'où $f(a) = 0$. D'où $x = 0$ puisque $x = f(a)$.

Implication réciproque $\Leftarrow$: Supposons que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$, et montrons que $Ker(f) = Ker(f^2)$.
Par double inclusion :
Soit $x \in Ker(f)$: alors $f(x) = 0$ donc $f(f(x)) = f(0) = 0$ par linéarité de f d'où $x \in Ker(f \circ f)$
On a donc $Ker(f) \subset Ker(f^2)$.
Soit $x \in Ker(f^2)$: donc $f(f(x)) = 0$ Mais alors $f(x) \in Ker(f)$ (puisque $f(f(x)) = 0$). Comme par ailleurs, par définition de l'image, $f(x) \in Im(f)$, on en déduit que $f(x) \in Ker(f) \cap Im(f)$.
Par hypothèse, on obtient $f(x) = 0_E$. D'où $x \in Ker(f)$.

Corrigé de l'exercice 18

2. Montrons que pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, $g(f(P)) - f(g(P)) = P$.
   Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Alors $g(f(P)) - f(g(P)) = g(xP) - f(P') = (xP)' - xP' = P + xP' - xP' = P$.
3. Par récurrence : le cas $n = 1$ a été fait au 2.
   Supposons que pour un certain $n \geq 1$, $g \circ f^n - f^n \circ g = nf^{n-1}$. Montrons que $g \circ f^{n+1} - f^{n+1} \circ g = (n+1)f^n$.
   Or $g \circ f^{n+1} - f^{n+1} \circ g = g \circ f^n \circ f - f^{n+1} \circ g = (f^n \circ g + nf^{n-1}) \circ f - f^{n+1} \circ g$ par H.R.
   $= f^n \circ g \circ f + nf^n - f^{n+1} \circ g = f^n \circ g \circ f - f^n \circ f \circ g + nf^n = f^n \circ (g \circ f - f \circ g) + nf^n$ par linéarité (attention faux sinon !)
   $= f^n(id_E) + nf^n$ d'après le cas $n = 1$ (question 2.)
   $= (n+1)f^n$.
   Conclure.

Corrigé de l'exercice 19 question 2

Soit $x \in E$. Le but est de montrer qu'il existe a_1, ...a_n n réels tels que $x = a_1e_1 + ... + a_ne_n$.
Or $f(x) \in Im(f)$ par définition : donc par hypothèse, on sait qu'il existe n réels a_1, ...a_n tels que $f(x) = a_1f(e_1) + ... + a_nf(e_n)$. Mais alors par linéarité de f, on a : $f(x) = f(a_1e_1 + ... + a_ne_n)$, d'où par injectivité de f,
$x = a_1e_1 + ... + a_ne_n$.

Corrigé dernière question exercice 21

Posons $P : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in R_n[x]$.
Alors $P' : x \mapsto a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1}$.
Alors $P \in Ker(\Phi) \Leftrightarrow P - P' = 0_{\mathbb{R}[x]} \Leftrightarrow P = P'$ et par unicité de l'écriture d'un polynôme, on peut identifier les coefficients d'où :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = a_1 \\ a_1 = 2a_2 \\ a_2 = 3a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} = na_n \\ a_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 = a_n = a_{n-1} = ... = a_1 = a_0 \text{ (par remontées)}$$

$\Leftrightarrow P : x \mapsto 0$.

D'où $Ker(\Phi) = \{0_{\mathbb{R}[x]}\}\}$ et Φ est injective.
(On aurait aussi pu considérer les degrés, et montrer que si P non nul, $\deg(P) \neq \deg(P')$...)

Corrigé de l'exercice 22

1. laissé au lecteur
2. $Ker(\Phi) = \{P \in \mathbb{R}_n[x] /$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2-1)P(x) = 0\}$. Or comme le polynôme $x \mapsto x^2 - 1$ est non nul, d'après la propriété d'intégrité, on a $(x^2-1)P = 0_{\mathbb{R}[X]} \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[x]}$. Donc $Ker(\Phi) = \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$ et Φ est injective.
3. On doit montrer une égalité entre deux ensembles, donc on raisonne par double inclusion.
Montrons que $Im(\Phi) \subset Ker(u)$: soit $R \in Im(\Phi)$. Alors il existe $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\Phi(P) = R$
càd pour tout $x \in \mathbb{R}$, $R(x) = (x^2-1)P(x)$. On en déduit d'une part que $deg(R) = 2 + deg(P) \leq n+2$, donc $R \in \mathbb{R}_{n+2}[x]$ et d'autre part que (avec $x = 1$ puis $x = -1$) : $R(1) = 0 \times P(1) = 0$ et $R(-1) = 0$.
d'où $u(R) = (R(1), R(-1)) = (0,0)$. On obtient bien $R \in Ker(u)$.
(La propriété sur le degré de R est importante, car sinon, on ne pouvait pas appliquer u !)
Réciproquement, montrons que $Ker(u) \subset Im(\Phi)$: soit $R \in Ker(u)$.
Alors $deg(R) \leq n+2$ et $(R(1), R(-1)) = (0,0)$.
Donc $R(1) = 0$ et $R(-1) = 0$. On en déduit que 1 et -1 sont racines de R, d'où $(x-1)(x+1) = x^2-1$ divise R : il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $R(x) = (x^2-1)Q(x)$. Or $deg(Q) + 2 \leq n+2$ donc $deg(Q) \leq n$ et $Q \in \mathbb{R}_n[x]$. Cela suffit pour dire que $R = \Phi(Q)$, donc que $R \in Im(\Phi)$.
(là encore prendre conscience qu'il fallait justifier $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ pour pouvoir écrire $\Phi(Q)$).
4. Posons $(X^0, X^1, ..., X^{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n+2}[x]$.
Alors $Im(u) = Vect(u(X^0), u(X), u(X^2), ...u(X^{n+1}), u(X^{n+2}))$. Or $u(X^0) = (1,1)$ puisque $X^0 : x \mapsto 1$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $X^0(x) = 1$ et selon la parité de $k \in \mathbb{N}^*$, $u(X^k) = (1,-1)$ ou $u(X^k) = (1,1)$. Donc après suppression des redondants, $Im(u) = Vect((1,1), (1,-1), ...(1, (-1)^{n+2})) = Vect((1,1), (0,-2)) = Vect((1,1), (0,1)) = Vect((1,0), (0,1)) = \mathbb{R}^2$. Donc u est surjective.

Corrigé exercice 23

Attention, coquilles dans l'énoncé ! Dans l'introduction de E, il faut bien sûr mettre l'intervalle $[-1,1]$ et non $[0,1]$!! et il fallait lire $\varphi_1(f) = \int_{-1}^{0} f(t)dt$ .....

1. φ_1 est linéaire par linéarité de l'intégrale, et $\varphi : E \to \mathbb{R}$. Donc φ est bien une forme linéaire.
2. D'après la relation de Chasles, on a pour tout $f \in E$, $\varphi_3(f) = \varphi_1(f) + \varphi_2(f)$. D'où $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$ et la famille est liée.
3. Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 = 0_E$.
Alors pour tout $f \in E$, on a $a_1\varphi_1(f) + a_2\varphi_2(f) = 0_{\mathbb{R}}$ $(*)$.
En particulier, si on choisit f une fonction continue sur $[-1,1]$, mais nulle sur $[-1,0]$: par exemple poser $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ (f est bien continue !), alors $\varphi_1(f) = 0$ et $\varphi_2(f) > 0$ donc $(*)$ donne $a_2 = 0$.
Prendre alors $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ ... on obtient $a_1 = 0$.
La famille est bien libre ...

Un exercice supplémentaire ; avec son corrigé :

Enoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application linéaire.
Montrer par analyse et synthèse qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

$\longrightarrow$ remarquer qu'il n'y a donc pas beaucoup d'applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$!!

Corrigé

Analyse : supposons qu'il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$. Alors en $x = 1$, on obtient $a = f(1)$, donc il y a au plus un candidat pour a.
Synthèse : vérifions que $a = f(1)$ convient bien, cad vérifions que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(1)x$.
Or f est supposée linéaire, donc comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = x \times 1$, on a bien $f(x) = xf(1)$.

Conclusion : les seules applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications du type : $x \mapsto ax$.

Un exercice supplémentaire, difficile, avec son corrigé :

Enoncé

On pose $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ telle que $f(a + bx + cx^2) = (b-c) + (4b - 3a - 3c)x + (b-a)x^2$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Définir $f \circ f$. En déduire que : $f \circ f - 3f + 2id = 0$, et déterminer un polynôme annulateur de f.
3. Prouver que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ et exprimer sa réciproque f^{-1} en fonction de f.
4. A l'aide de la question 2, montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f^n = a_n id + b_n f$.
Préciser les relations de récurrences entre ces deux suites.

5. Mq (b_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire l'expression de f^n en fonction de n, f et id.

Corrigé

1. Laissé au lecteur
2. Soit $P = a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}[x]$. Alors $f\circ f(P) = f(f(P)) = f((b-c)+(4b-3a-3c)x+(b-a)x^2) = ((4b-3a-3c)-(b-a))+(4(4b-3a-3c)-3(b-c)-3(b-a))x+((4b-3a-3c)-(b-c))x^2 = (3b-2a+3c)+(10b-9a-9c)x+(3b-3a-2c)x^2$.
   d'où $f\circ f(P)-3f(P)+2P = (3b-2a+3c)+(10b-9a-9c)x+(3b-3a-2c)x^2-3((b-c)+(4b-3a-3c)x+(b-a)x^2)+2(a+bx+cx^2) = (3b-2a+3c-3(b-c)+2a)+((10b-9a-9c)-3(4b-3a-3c)+2b)x+((3b-3a-2c)-3(b-a)+2c)x^2 = 0$
   D'où $f\circ f - 3f + 2id = 0$.
   Un polynôme annulateur de l'endomorphisme f est donc : $P : x \mapsto x^2 - 3x + 1$.
3. On en déduit que $\frac{1}{2}f\circ f - \frac{3}{2}f = id$ soit encore par linéarité $f\circ(\frac{1}{2}f - \frac{3}{2}id) = id$.
   De même, $(\frac{1}{2}f - \frac{3}{2}id)\circ f = id$.
   D'où f est bijectif (donc est un automorphisme) et $f^{-1} = (\frac{1}{2}f - \frac{3}{2}id)$.
   (en effet, on a bien trouvé une application g telle que $g\circ f = id$ et $f\circ g = id$, cf chapitre applications bijectives)
4. Par récurrence : $n = 0$: $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ conviennent puisqu'alors $a_0 id + b_0 f = id = f^0$.
   Supposons que pour un certain n, on a trouvé a_n et b_n deux réels tels que $f^n = a_n id + b_n f$.
   Alors $f^{n+1} = f\circ f^n = f\circ(a_n id + b_n f) = a_n f + b_n f^2$ par linéarité
   $= a_n f + b_n(3f - 2id) = -2b_n id + (a_n + 3b_n)f$. Donc $a_{n+1} = -2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 3b_n$ conviennent.
   Conclure.
5. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = a_{n+1} + 3b_{n+1} = -2b_n + 3b_{n+1}$. Donc (b_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   Equation caractéristique : $x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$. $\Delta = 1$ d'où deux solutions 1 et 2.
   On en déduit qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \lambda + \mu 2^n$. Comme $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$, on obtient (après résolution du système), $\lambda = -1$ et $\mu = 1$.
   Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = -1 + 2^n$, donc pour $n \geq 1$, $a_n = -2b_{n-1} = 2 - 2^n$, encore vraie pour $n = 0$.
   Finalement pour $n \geq 0$, $f^n = (2 - 2^n)id + (2^n - 1)f$.