Corrigés des exercices de la feuille : Applications linéaires et matrices

Pour des raisons de gain de temps (et de lisibilité), j'ai fait le choix de souvent marquer $Mat(f)$ sans préciser <u>en indice</u> les différentes bases utilisées (cf cours pour la bonne notation).

Corrigé de l'exercice 1 : Bien identifier les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée, avant d'écrire les "extérieurs" de la matrice ... avant de la remplir ! Pour la remplir, toujours revenir à la définition : par exemple, dans la question 1,
$f((1,0)) = (2,1,1) = 2(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$ d'où les coefficients 2, 1 ,1 dans la première colonne.

1. $Mat(f) = \begin{array}{cc} f((1,0)) & f((0,1)) \\ \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{array}$

2. $Mat(f) = \begin{array}{cccc} f(1) & f(x) & f(x^2) & f(x^3) \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{array}$

En effet, si $P = 1$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 1$ et donc $P(x+1) = 1$ d'où $f(1) = 1$.
Si $P = x^2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^2$ et donc $P(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ d'où $f(x^2) = x^2 + 2x + 1$ et de même pour les deux autres.

Corrigé de l'exercice 2

1. Base canonique de $\mathbb{R}^2$: (1,0) et (0,1)
   De plus, $f((1,0)) = (4,1) = 4(1,0) + 1(0,1)$ et $f((0,1)) = (-6,-1) = -6(1,0) - 1(0,1)$ d'où $Mat(f) = \begin{array}{cc} f((1,0)) & f((0,1)) \\ \left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} -6 \\ -1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ (1,0) \\ (0,1) \end{array}$

2. On change la base de départ, mais pas la base d'arrivée. De plus, $f((1,1)) = (-2,0) = -2(1,0) + 0(0,1)$ et $f((1,-1)) = (10,2) = 10(1,0) + 2(0,1)$ d'où $Mat(f) = \begin{array}{cc} f((1,1)) & f((1,-1)) \\ \left(\begin{array}{c} -2 \\ 0 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 10 \\ 2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ (1,0) \\ (0,1) \end{array}$ On remarque que la matrice est triangulaire.

3. Ici, on change la base d'arrivée (par rapport à la question 1.).
   $f((1,0)) = (4,1) = ?(1,1) + ?(1,-1)$. Soit vous arrivez à deviner les ?, soit vous poser un système (comme $\{(1,1),(1,-1)\}$ est une base, on sait qu'il existe une unique écriture sous cette forme).
   On résout $a(1,1) + b(1,-1) = (4,1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a+b & = 4 \\ a-b & = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 5/2 \\ b = 3/2 \end{array}\right.$. D'où $f((1,0)) = \frac{5}{2}(1,1) + \frac{3}{2}(1,-1)$.
   Par un raisonnement analogue, on trouve $f((0,1)) = (-6,-1) = -\frac{7}{2}(1,1) - \frac{5}{2}(1,-1)$
   D'où $Mat(f) = \begin{array}{cc} f((1,0)) & f((0,1)) \\ \left(\begin{array}{c} 5/2 \\ 3/2 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} -7/2 \\ -5/2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ (1,1) \\ (1,-1) \end{array}$ Vous pouvez remarquer que cette matrice est plus compliquée que la matrice de départ, donc il n'y a aucun intérêt de changer de base de cette façon ...

4. On change la base de départ et la base d'arrivée.
   De plus, $f((2,1)) = (2,1) = 1(2,1) + 0(3,1)$ et $f((3,1)) = (6,2) = 0(2,1) + 2(3,1)$ (ici aussi, si vous ne devinez pas les coordonnées dans la nouvelle base, vous pouvez poser un système) d'où $Mat(f) = \begin{array}{cc} f((2,1)) & f((3,1)) \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ (2,1) \\ (3,1) \end{array}$

   On trouve une matrice diagonale (beaucoup plus intéressante, voir les exercices suivants).

Corrigé de l'exercice 4

1. familles de bon cardinal ... faire la moitié du travail !
   Puis écrire $e'_1 = (0,1,1)$, $e'_2 = (1,0,1)$ et $e'_3 = (1,1,0)$, $f'_1 = (1/2,1/2)$, $f'_2 = (1/2,-1/2)$.
   Puis montrer libre ou génératrice de ....

2. Bien marquer les extérieurs de la matrice pour ne pas vous mélanger les pinceaux ! Et remarquer $f_1 = f_1' + f'2$ et $f_2 = f_1' - f_2'$. On trouve $Mat_{\mathcal{F},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $Mat_{\mathcal{F}',\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$,
puis $Mat_{\mathcal{F}',\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$
Plusieurs façons de faire les calculs : soit rester dans l'abstrait $u(e_1') = u(e_2) + u(e_3) = (-f_1 + 2f_2) + (f_1 - 3f_2)$ (par lecture de la matrice A) $= 0f_1 - f_2$ etc.
Soit utiliser la matrice pour déterminer $u(x, y, z)$ pour tout (x, y, z), puis écrire $u(e_1') = u(0, 1, 1) = (0, -1)$ et remplir ainsi la matrice ....

Eléments de correction de l'exercice 5 : cf PJ manuscrite

Corrigé exercice 6

Des calculs mais intéressant car change d'espace (et permet de réaliser que même une matrice carrée, peut être représentée par une matrice colonne ! !) ...

1. Vu les opérations sur les matrices, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, si $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\varphi(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = ... = \lambda\varphi(M) + \varphi(N)$. Ccl.
2. Base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les calculs pour trouver les images sont un peu longs : vous pouvez aussi calculer une bonne fois pour toutes $\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}))$ pour ensuite particulariser !
On trouve $\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \times E_11 + 0 \times E_{12} + 0 \times E_{21} + 0 \times E_{22}$.
De même $\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \times E_11 + 1 \times E_{12} + 0 \times E_{21} + 0 \times E_{22}$. $\varphi(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \times E_11 + 0 \times E_{12} + 1 \times E_{21} + 0 \times E_{22}$, et enfin $\varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \times E_11 + +1 \times E_{12} + 0 \times E_{21} + 1 \times E_{22}$.
D'où la matrice de φ :
$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(E_{11}) & \varphi(E_{12}) & \varphi(E_{21}) & \varphi(E_{22}) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array}$$

Eléments de correction de l'exercice 7

On a $f(1) = 0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(x^k) = kx^k$.
La matrice (bien écrire les enrobages !) est donc diagonale. En particulier elle est triangulaire, avec un coeff diagonal nul, donc elle n'est pas inversible et f n'est pas bijective.
Ou plus court ici ! $f(1) = 0$ donc $1 \in ker(f)$ et f n'est pas injective donc pas bijective ...

Puis $Im(f) = Vect(0, x, 2x^2, ..., nx^) = Vect(x, 2x^2, ..., nx^n)$ donc la famille $\{x, 2x^2, ..., nx^n\}$ est génératrice de $Im(f)$, et comme elle est libre car constituée de polynômes non-nuls de degrés différents, c'est une base de $Im(f)$.
Théorème du rang (...) : $dim(ker(f) = 1$. Donc la famille constitué du seul polynôme 1 est de bon cardinal. Comme elle est libre (1 seul vecteur non-nul), elle est une base de $ker(f)$ et $ker(f) = Vect(1)$.
Ou plus court ici : résoudre directement $f(P) = 0$ via propriété d'intégrité donc $f(P) = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P = cstt$.

Corrigé exercice 9

1. Pour que la famille soit libre, il faut déjà que les vecteurs ne soient pas nuls. Or $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc il existe $u \in E$ tel que $f^2(u) \neq 0_E$. Prenons ce u là, et vérifions qu'alors la famille $(u, f(u), f^2(u))$ est bien une base de E.
Comme E est de dimension 3 par hypothèse, cette famille est de bon cardinal, donc il suffit de montrer qu'elle est libre.
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $au + bf(u) + cf^2(u) = 0_E$ $(*)$.
Alors en appliquant f on obtient $f(au + bf(u) + cf^2(u)) = f(0_E)$, ce qui donne, par linéarité de f
$af(u) + bf^2(u) + 0 = 0$ $(**)$ puisque de plus $f^3 = 0$.
En réappliquant f ; on obtient (après linéarité bien sûr) :
$af^2(u) + 0 = 0$. Comme $f^2(u) \neq 0$ (c'est ainsi qu'on l'a choisi !), on en déduit $a = 0$. Il reste à remonter dans $(**)$: on obtient $bf^2(u) = 0$ d'où $b = 0$ et alors $(*)$ donne $c = 0$. La famille est bien libre donc est une base de E.

2. Comme à chaque fois, commencer par écrire les extérieurs de la matrice, avant de chercher à la remplir ! De plus, comme la famille $(u, f(u), f^2(u))$ est une base, on sait que toutes les écritures dans cette base sont uniques ... donc si on en trouve une, c'est la bonne ! Ainsi, $f(u) = 0*u+1*f(u)+0*f^2(u)$, $f^2(u) = 0*u+0*f(u)+1*f^2(u)$ et enfin, $f^3(u) = 0 = 0*u + 0*f(u) + 0*f^2(u)$. D'où la matrice dans cette base :

$$Mat(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f^2(u) & f^3(u) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ u \\ f(u) \\ f^2(u) \end{array}$$

3. comme le dit la question, c'est une généralisation, il suffit de gérer la taille n !
On commence par prendre $u \in E$ tel que $f^{n-1}(u) \neq 0_E$. Puis on montre, que la famille $(u, f(u), f^2(u), ..., f^{n-1}(u))$ est une base de E.
Enfin, on écrit la matrice de f dans cette base : on obtient une matrice triangulaire inférieure, avec une sous-diagonale égale à 1, et tous les autres coefficients nuls.

Corrigé de l'exercice 16

1. Comme la famille $\mathcal{C}$ est de bon cardinal, il suffit de montrer qu'elle est libre OU qu'elle est génératrice.
Méthode via génératrice : $Vect(v_1, v_2 v_3) = Vect(-e_1, 2e_2 + e_3, -e_2) = Vect(-e_1, e_3, -e_2) = Vect(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$ par hypothèse (bien marquer les opérations du Vect !).
Méthode via libre : soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$.
Alors $a(-e_1) + b(2e_2 + e_3) + c(-e_3) = 0$ d'où $-ae_1 + (2b)e_2 + (b-c)e_3 = 0$. Et comme la famille (e_1, e_2, e_3) est libre par hypothèse, $\begin{cases} -a = 0 \\ 2b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$ d'où $a = b = c = 0$. Conclure.
2. Par linéarité de f, puis par lecture de la matrice, $f(v_1) = -f(e_1) = -(2e_1 + 2e_2) = 2v_1 + 2v_3$.
$f(v_2) = 2f(e_2)+f(e_3) = 2(-e_1-e_2+e_3)+(2e_1+2e_2+2e_3) = 4e_3 = 4v_2+8v_3$ et $f(v_3) = -f(e_2) = e_1+e_2-e_3 = -v_2 - 3v_3 - v_1$.
Il reste à dessiner la matrice !
On aurait aussi pu poser la matrice de passage P et faire les calculs matriciels, mais ici, cela aurait été beaucoup plus long car les calculs ci-dessus sortent bien vu que le e_3 ne peut venir que du v_2 et donc ensuite on trouve la coordonnée en v_3 puis en v_1 ....

Corrigé des exercices 14 et 18 : voir PJ manuscrite.
Attention, le corrigé de l'exercice 14 est après celui de l'exercice 5 et de l'exercice 18

Corrigé de la dernière question exercice 19

On remarque que $M = A + 3I$. Mais d'après la question 3., on sait qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ En effet, P est une certaine matrice de passage : c'est la matrice de passage de la base canonique vers la nouvelle base.
Donc finalement, $M = PBP^{-1} + 3I$. Or astuce ! $3I = P3IP^{-1}$ d'où $M = P(B + 3I)P^{-1}$.
D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = P(B+3I)^n P^{-1}$ (petite récurrence, ou itération). Il reste à utiliser 5. et à faire les calculs matriciels correspondants ....

Corrigé de l'exercice 20

Rappel : Définition : une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite inversible si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I$ et $BA = I$.

Le but de cet exercice est de faire la preuve de la proposition vue dans le chapitre matrices :
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Soit A une matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe bien une matrice $B \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$.
On notera $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (resp. g) l'endomorphisme associé à A (resp. à B)

1. Comme $AB = I_n$, cela donne $f \circ g = id_{\mathbb{R}^n}$.
2. C'est l'occasion de réviser la définition de la surjectivité avec les quantificateurs !
Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Le but est de montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = y$.
Or on remarque que $f(g(y)) = y$ puisque $f \circ g = id$. Donc $x = g(y)$ convient bien. f est donc bien surjective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Bonus : On sait déjà que $0 \in Ker(g)$. Soit maintenant $x \in Ker(g)$ (et montrons que $x = 0$ pour obtenir l'autre inclusion). Or par hypothèse $g(x) = 0$, donc par linéarité de f, $f(g(x)) = f(0) = 0$ d'où d'après 1., $x = 0$ puisque $f(g(x)) = x$).

3. f est surjective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, ev de dimension finie, donc f est bijective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Donc f^{-1} existe. Il reste à montrer que $f^{-1} = g$. Or $f \circ g = id$ donc $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ id$ càd $g = f^{-1}$.
4. On en déduit que $g \circ f = id$ (puisque $g = f^{-1}$), d'où matriciellement : $BA = I_n$.
   On a donc bien $BA = I_n = AB$, et A est inversible d'inverse B.

Corrigé de l'exercice 21

Posons $(e_1, ...e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a donc par lecture de la matrice, $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_1$,$u(e_3) = e_2$ ..., $u(e_n) = e_{n-1}$. D'où en appliquant u linéaire,
$u^2(e_1) = 0$, $u^2(e_2) = u(e_1) = 0$, $u^2(e_3) = e_1$, ... ,$u^2(e_n) = e_{n-2}$.
Par itération, $u^k(e_1) = 0 = ... = u^k(e_k)$, $u^k(e_{k+1}) = e_1$, $u^k(e_{k+2}) = e_2$ ..., $u^k(e_n) = e_{n-k}$.
En particulier, on trouve que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u^n(e_i) = 0$ autrement dit, $u^n = 0$.
Il reste à dessiner la matrice associée à u^k pour obtenir M^k. La surdiagonale de 1, se décale progressivement .... donc pour M^k elle est décalée de k rangs (donc le 1 sur la première ligne est colonne k, et le 1 sur la dernière colonne est ligne $n - k$). Ceci, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Comme $M^n = 0$, on sait que pour tout $k \geq n$, $M^k = 0$.

Corrigé de l'exercice 22 :

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: on notera C_1, ..., C_n ses colonnes (que l'on peut voir comme des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Supposons maintenant que M est de rang 1 : alors $dim(Vect(C_1, .., C_n)) = 1$, autrement dit $Vect(C_1, ..., C_n)$ est une droite vectorielle et il existe X une matrice colonne non nulle, telle que $Vect(C_1, ...C_n) = Vect(X)$.
On en déduit par définition du vect que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $C_i = \lambda_i X$.
En notant $U = {}^tX$ (càd ${}^tU = X$) et $V = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, on peut alors vérifier que ${}^tUV = M$ (faire le produit matriciel à la main pour le voir !).
Si vous avez bien compris le produit matriciel précédent, le sens réciproque va plutôt vite :
en effet en posant $X = {}^tU$ et $V = (v_1, ..., v_n)$, on voit que $M = {}^tUV$ donne que $C_1 = v_1X$, $C_2 = v_2X$, ... $C_n = v_nX$, autrement dit $Vect(C_1, ..., C_n) = Vect(X)$ puisque V non nulle (donc au moins l'un des v_i est non-nul). Comme par hypothèse on suppose aussi U (donc X) non nul, on en déduit bien que M est de rang 1.

Corrigé de l'exercice 23 : Attention ! ne peut être fait qu'après avoir vu le chapitre Compléments d'algèbre linéaire ....

1. idée : comme h est de rang 1, $Im(h)$ est une droite vectorielle, et $Ker(h)$ est un plan. Donc soit la droite coupe le plan en l'origine, soit elle est incluse dans le plan (ne pas oublier que la droite comme le plan passe nécessairement par l'origine).
   Rédaction : on suppose h de rang 1. Deux cas possibles disjoints : $Im(h) \cap Ker(h) = \{0\}$ et $Im(h) \cap Ker(h) \neq \{0\}$.
   Etude du premier cas : si on a $Im(h) \cap Ker(h) = \{0\}$, comme de plus le théorème du rang donne
   $dim(Im(h)) + dim(Ker(h)) = dim(\mathbb{R}^3)$, on obtient $Im(h) \bigoplus Ker(h) = \mathbb{R}^3$, soit l'assertion (A).
   Etude du deuxième cas : si maintenant $Im(h) \cap Ker(h) \neq \{0\}$, alors il existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ non-nul, tel que $\vec{x} \in Im(h)$ et $\vec{x} \in Ker(h)$.
   Comme $Im(h)$ et $Ker(h)$ sont des sev, on en déduit même : $Vect(\vec{x}) \subset Im(h)$ et $Vect(\vec{x}) \subset Ker(h)$
   (si besoin, relire les propriétés du Vect comme plus petit sev contenant ...).
   Mais h étant de rang 1, $dim(Im(h)) = 1 = dim(Vect(\vec{x}))$ d'où (une inclusion + égalité des dimensions),
   $Im(h) = Vect(\vec{x})$. D'après ce qui précède, on en déduit bien : $Im(h) = Vect(\vec{x}) \subset Ker(h)$ soit l'assertion (B).
   (On aurait pu aussi montrer que si h ne vérifiait pas (A) alors h vérifiait (B) et réciproquement ....)
2. Prendre une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ adaptée à la somme directe : autrement dit $\vec{e_1} \in Im(h)$ et $\vec{e_2}, \vec{e_3} \in Ker(h)$. Alors on a directement $h(\vec{e_2}) = 0 = h(\vec{e_3})$. Puis par définition de l'image, $h(\vec{e_1}) \in Im(h)$. Comme h est de rang 1, on a $Im(h) = Vect(\vec{e_1})$ (une des inclusions est évidente + égalité des dimensions). Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h(\vec{e_1}) = \lambda\vec{e_1}$. Enfin, comme h est non nul, $h(\vec{e_1}) \neq 0$ d''où λ non-nul. Il reste à écrire la matrice de h dans cette base pour réaliser que c'est celle de l'énoncé !
   Alors $h^2 = h \circ h$ est représentée par la matrice $D^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Remarque :
   si on avait $\lambda = 1$, on aurait $h^2 = h$ et h serait le projecteur sur la droite $Im(h)$, parallèlement à $Ker(h)$.
   Dans le cas de $\lambda \neq 1$, dans l'idée, on a une projection puis une dilatation ....

3. Prendre une base $(\vec{e_1})$ de $Im(h)$ que l'on complète en une base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ de $ker(h)$, puis en une base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ de R^3. Alors on a $h(\vec{e_1}) = 0 = h(\vec{e_2})$, et par définition de l'image $h(\vec{e_3}) \in Im(h)$: donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h(\vec{e_3}) = \lambda e_1$. On a $\lambda \neq 0$, puisque h est non-nul (puisque de rang 1).
   Poser alors $\vec{c_1} = \vec{e_1}$, $\vec{c_2} = \vec{e_2}$, $\vec{c_3} = \frac{1}{\lambda}\vec{e_3}$. Cette nouvelle famille reste bien une base de $\mathbb{R}^3$, et la matrice de h dans cette base donne la matrice T voulue.
   Dans ce cas, $T^2 = 0$ donc $h^2 = 0$.