Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Comparaison de fonctions/suites

Corrigé de la fin de l'exercice 1

$e(x) = \frac{1}{x}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.
Une mauvaise piste serait de séparer le ln : $e(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x) - \frac{1}{x}\ln(1-x)$: en effet d'après l'équivalent usuel du ln, $\frac{1}{x}\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}x = 1$ et $\frac{1}{x}\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}(-x) = -1$ mais ensuite, la somme (ou différence) est interdite ! (car parfois cela marche, et parfois non). Donc conclusion impossible.
Idée : écrire $\ln(\frac{1+x}{1-x})$ sous la forme $\ln(1+X)$ pour pouvoir utiliser l'équivalent usuel du ln.
Or $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x+2x}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} + \frac{2x}{1-x} = 1 + \frac{2x}{1-x}$ d'où $\ln(\frac{1+x}{1-x}) = \ln(1+\frac{2x}{1-x}) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x}{1-x}$ car $X = \frac{2x}{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Finalement, $e(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\frac{2x}{1-x} = \frac{2}{1-x} \underset{x\to 0}{\sim} 2$ puisque $x = o(1)$ quand $x \to 0$.
Conclusion : $e(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$.

$f(x) = \sin x \ln x \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ d'après les croissances comparées.

$g(x) = x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x)$: g est une somme de 2 termes, mais qui donnent l'impression d'être de même poids. Il faut donc transformer l'écriture de g pour faire apparaître un négligeable et pouvoir le supprimer.
Or $g(x) = x\ln(x+1) - x\ln(x) - \ln(x) = x[\ln(x+1) - \ln(x)] - \ln(x) = x\ln(\frac{x+1}{x}) - \ln(x) = x\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln(x)$. or $x\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\frac{1}{x} = 1$ puisque $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $u = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $x\ln(1+\frac{1}{x}) = o(\ln(x))$
et finalement, $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln(x)$

$h(x) = \lfloor x\rfloor \ln(1+\frac{1}{x^2})$. On sait que $\ln(1+\frac{1}{x^2}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ puisque $u = \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Il reste à montrer que $\lfloor x\rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$: par encadrement.
En effet, par définition de la partie entière, on a $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$ d'où $x - 1 \leq \lfloor x\rfloor \leq x$ et finalement, $1 - \frac{1}{x} \leq \frac{\lfloor x\rfloor}{x} \leq 1$.
Théorème d'encadrement, $\frac{\lfloor x\rfloor}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et $\lfloor x\rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
Finalement, $h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$.

$i(x) = \frac{\ln(\cos^2 x)}{x}$ (bien défini au voisinage de 0, puisque $\cos(0) = 1$). Astuce : pour pouvoir utiliser l'équivalent usuel du ln, on écrit $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, en remarquant que $sin^2 x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
D'où $i(x) = \frac{\ln(1-\sin^2 x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\sin^2 x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{x^2} = -1$ (cf équivalents usuels). Finalement, $i(x) \underset{x\to 0}{\sim} -1$.

Corrigé de l'exercice 2

$b_n \sim 2n$ puisque $\ln(n) = o(n)$. $c_n = \sqrt{n^2+1} - n$: somme de deux termes de même poids puisque $n^2 + 1 \sim n^2$ donc $\sqrt{n^2+1} \sim \sqrt{n^2} = n$. Essayons de se ramener à l'équivalent usuel : $\sqrt{1+u} - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}u$, en factorisant.
$c_n = \sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})} - n = \sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - n = n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1) \sim n(\frac{1}{2}\frac{1}{n^2})$ puisque $u = \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Finalement, $c_n \sim \frac{1}{2n}$.

$d_n = (n+1)^p - n^p = (n(1+\frac{1}{n}))^p - n^p = n^p(1+\frac{1}{n})^p - n^p = n^p[(1+\frac{1}{n})^p - 1] \sim n^p[p\frac{1}{n}]$ puisque $u = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et que $(1+u)^\alpha \underset{u\to 0}{\sim} \alpha u$.
Finalement, $d_n \sim pn^{p-1}$.
Autre rédaction possible via la factorisation : $d_n = n^p[\frac{(n+1)^p}{n^p} - 1] = n^p[(\frac{n+1}{n})^p - 1] = n^p[(1+\frac{1}{n})^p - 1] \sim n^p p(\frac{1}{n})$ ...

Corrigé de l'exercice 3

1. Non : l'équivalence est encore plus précis comme notion que "l'écart tend vers 0".
   Contre-exemple : $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, et $v_n = \frac{1}{n^2}$. Alors $u_n - v_n = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pourtant $u_n \sim \frac{1}{n}$ donc $v = o(u)$.
   Toutefois, si par exemple les suites divergent vers l'infini, alors ça marche, car $\frac{u_n}{v_n} = \frac{u_n - v_n}{v_n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + 1$ (pas de FI pour la première limite, contrairement au cas où v converge vers 0 !)
2. Oui ! car si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0$, alors $u_n \sim \ell \sim u_{n+1}$.
3. On ne peut rien dire a priori, car tout peut arriver.
   Exemple 1 : si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \sim \frac{n}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $u_n \sim u_{n+1}$.
   Exemple 2 : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{-n}$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1} \neq 1$.
   Exemple 3 : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{-n^2}$, on a même $u_{n+1} = o(u_n)$ ....
4. On ne peut rien dire a priori, car tout peut arriver.
   Exemple 1 : si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} \sim \frac{n}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $u_n \sim u_{n+1}$.
   Exemple 2 : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^n$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1 \neq 1$.
   Exemple 3 : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{n^2}$, on a même $u_n = o(u_{n+1})$ ....

5. Faux ! Mais vrai à partir d'un certain rang .
En effet si $u_n \sim v_n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ (le cas où v stationnaire nulle n'est pas très intéressant, car alors u stationnaire nulle également par équivalent : ils ont bien même signe).
Donc à partir d'un certain rang, $\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$, par définition de la limite (avec $\epsilon = \frac{1}{2}$).
En particulier, à partir d'un certain rang $\frac{u_n}{v_n} \geq 0$ donc u_n et v_n ont bien même signe.
Mais au départ, on pourrait avoir par exemple u_0 (et u_1...) de signe contraire à v_0 (et v_1...)

Corrigé de l'exercice 5

1. TV de la fonction f_n : f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = 5x^4 + n$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) > 0$; de plus $f_n(0) = -1$ et $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
f_n est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers $]-1, +\infty[$. Comme $0 \in]-1, +\infty[$, il existe un unique réel $u_n \in]0, +\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. On sait déjà $0 < u_n$, donc il reste à montrer $u_n < \frac{1}{n}$.
Or $f_n(\frac{1}{n}) = (\frac{1}{n})^5 > 0 = f_n(u_n)$, donc par stricte croissance de f_n, on en déduit $\frac{1}{n} > u_n$.
Le théorème d'encadrement permet d'en déduire que la suite (u_n) converge vers 0 (non demandé, mais utile pour la suite !).
3. $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow (u_n)^5 + nu_n - 1 = 0$. Idée à formaliser : dans ces 3 termes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n^5 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc finalement seulement deux termes importent nu_n et 1.
Rédaction : $nu_n = 1 - u_n^5 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc par définition, $u_n \sim \frac{1}{n}$.
4. On pose $a_n = \frac{1}{n} - u_n$. Dans (*) : $(u_n)^5 + nu_n - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n}(u_n)^5 + u_n - \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} - u_n = \frac{1}{n}(u_n)^5$
d'où $a_n = \frac{1}{n}(u_n)^5 \sim \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^5 = (\frac{1}{n})^6$ car $u_n \sim \frac{1}{n}$ (puissance constante permise sur les équivalents)
On en déduit le développement asymptotique (sera revu plus tard) de u_n : $u_n = \frac{1}{n} - (\frac{1}{n})^6 + o((\frac{1}{n})^6)$.

Corrigé de l'exercice 7 :

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $k! \leq n!$ donc par somme de ces inégalités : $\sum\limits_{k=0}^{n} k! \leq \sum\limits_{k=0}^{n} n! = (n+1)n!$.

Par ailleurs, $\sum\limits_{k=0}^{n} k! = 0! + 1! + ... + n! \geq n!$.

Donc finalement, $n! \leq \sum\limits_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)n!$ et comme $n! > 0$,

$1 \leq \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k!}{n!} \leq n+1$. Problème ! On n'a pas été assez "fin" dans la majoration.

On repart $\sum\limits_{k=0}^{n} k! = \sum\limits_{k=0}^{n-1} k! + n! \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} (n-1)! + n! = n \times (n-1)! + n! = 2n!$.

Toujours pas !

$$\text{On repart : } \sum_{k=0}^{n} k! = \sum_{k=0}^{n-2} k! + (n-1)! + n! \leq \sum_{k=0}^{n-2} (n-2)! + (n-1)! + n! = 2(n-1)! + n!$$

D'où $n! \leq \sum\limits_{k=0}^{n} k! \leq 2(n-1)! + n!$ et comme $n! > 0$, $1 \leq \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k!}{n!} \leq \frac{2(n-1)!+n!}{n!} = 1 + \frac{2}{n}$.

Il reste à conclure à l'aide du théorème d'encadrement ....

Corrigé de l'exercice 8

1. (a_n) est une suite décroissante et minorée par 0 (car positive), donc converge. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Alors on sait que $a_n + a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell = 2n$. Or $a_n + a_{n+1} \sim \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $2\ell = 0$ càd $\ell = 0$.
2. Attention, on n'a pas toujours $a_n \sim a_{n+1}$ (cf exercice 3, de nombreux contre-exemples), mais on peut se dire qu'entre la monotonie de a_n et la décroissance pas trop rapide (car $\frac{1}{n}$ ne décroit pas très vite) cela pourrait peut-être marcher ici ? Bref, on va montrer que $u_n \sim \frac{1}{2n}$.
On va utiliser la monotonie de la suite (a_n) pour obtenir un encadrement de a_n.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite a est décroissante, on sait $a_{n+1} \leq a_n$: d'où $a_n + a_{n+1} \leq 2a_n \leq a_n + a_{n-1}$.
Bref, $\frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) \leq a_n \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$.
D'où ($\frac{1}{2n} > 0$), $\frac{1}{2}\frac{a_n + a_{n+1}}{\frac{1}{2n}} \leq \frac{a_n}{\frac{1}{2n}} \leq \frac{1}{2}\frac{a_n + a_{n-1}}{\frac{1}{2n}}$.
Or $\frac{1}{2}\frac{a_n + a_{n+1}}{\frac{1}{2n}} = \frac{a_n + a_{n+1}}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ d'après l'équivalent de l'énoncé.
Par ailleurs , si $u_n \sim v_n$ alors on a aussi $u_{n-1} \sim v_{n-1}$ puisque le comportement est quand n tend vers l'infini, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$.
D'où $a_{n-1} + a_n \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$ (car $n-1 \sim n$, et donc $\frac{a_n + a_{n-1}}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Par encadrement on en déduit bien, $a_n \sim \frac{1}{2}\frac{1}{n}$.