Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Compléments d'algèbre linéaire

Corrigé de l'exercice 1 :

D'après le tout début du cours, on sait que $E+F = Vect((1,0,1),(-1,0,1),(1,0,0),(0,1,0))$
$= Vect((0,0,1),(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)) = \mathbb{R}^3$
(n'oubliez pas de marquer les opérations ! ici, $\vec{e_1} \leftarrow \vec{e_1} - \vec{e_3}$ et $\vec{e_2} \leftarrow \vec{e_2} + \vec{e_3}$).

Mais la somme ne peut pas être directe car $(\{(1,0,1),(-1,0,1)\}$ est une famille libre donc $dim(E) = 2$ et de même $dim(F) = 2$ donc $dim(E) + dim(F) = 4 \neq dim(\mathbb{R}^3)$.
Ou, réaliser que $(2,0,0) \in E \cap F$ puisque $(2,0,0) = (1,0,1) - (-1,0,1) \in E$, donc $E \cap F \neq \{0\}$.
Ou réaliser que la famille obtenue par concaténation $\{(1,0,1),(-1,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elle n'est pas de cardinal 3.

Corrigé de l'exercice 2 :

Rigoureusement identique à l'exercice 1 ... mais dans les polynômes !
On peut commencer par réécrire E pour simplifier la suite : $E = Vect(x-1,3) = Vect(x,1)$.
D'où $E+F = Vect(1,x,x,x^2) = Vect(1,x,x^2) = \mathbb{R}_2[x]$.
Puis la somme n'est pas directe car $dim(E) = 2 = dim(F)$ (justifier familles libres etc.)
d'où $dim(E) + dim(F) = 4 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$.
Ou, remarquer que $x \in E \cap F$ donc $E \cap F \neq \{0\}$...

Corrigé de l'exercice 3 :

Cet exercice est une application directe du cours.
Commencer par montrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une famille libre : soit $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$. On résout le système $\begin{cases} a + \quad c &= 0 \\ \quad b + c &= 0 \\ a - b + c &= 0 \\ \quad\quad c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{a = b = c = 0.$
On en déduit que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de E (puisque par définition de E, c'en est une famille génératrice) : d'où $dim(E) = 3$.
Pour des raisons analogues, on trouve $dim(F) = 2$.
Puis $F+G = Vect(.....,....) = Vect((1,0,1,0),(0,1,-1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0),(0,1,-1,-1))$ (j'ai utilisé le premier vecteur comme pivot, pour mettre un 0 dans chaque première coordonnée, puis je vais utiliser le 2e vecteur pour mettre un 0 en 2e coordonnée etc.)$=Vect((1,0,1,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$
$= Vect((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)) = \mathbb{R}^4$ d'où $dim(F+G) = dim(\mathbb{R}^4) = 4$.
Enfin, d'après la formule du cours, $dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$ d'où $dim(F \cap G) = 1$.

Corrigé de l'exercice 4 :

En fait cette question est à rapprocher de la question du chapitre précédent
" compléter cette famille ... en une base de ... ".
Si vous ne voyez pas le lien, peu importe : commencer par déterminer la taille d'un supplémentaire de F dans E.

Rappel : d'après le cours, on sait que F admet des supplémentaires (E est de dimension finie), donc on ne s'occupe pas du problème d'existence.

La famille $\{(1,0,0),(1,2,3)\}$, est une base de F (je vous laisse le soin de vérifier le caractère libre) donc $dim(F) = 2$.
Comme E est de dimension 3, on sait que tout supplémentaire de F sera de dimension 1 donc sera une droite vectorielle.
L'idée est donc de chercher G sous la forme $G = Vect(\vec{e})$. Mais comment choisir $\vec{e}$?

Si on utilise la phrase 6., G sera un supplémentaire de F dans E, ssi la famille obtenue par concaténation $\{(1,0,0),(1,2,3),\vec{e}\}$ est une base de $E = \mathbb{R}^3$. Donc on cherche bien un vecteur $\vec{e}$ qui va compléter la famille $\{(1,0,0),(1,2,3)\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$. D'où le rapprochement avec la question correspondante dans le chapitre précédent !!

Mais est-ce-que vous vous rappelez la méthode ?

Piochez dans la base canonique, et si vous en choisissez un qui ne ressemble pas trop aux autres cela devrait marcher : par exemple, ici, posons $\vec{e} = (0,0,1)$, càd $G = Vect((0,0,1))$.
La famille $\{(1,0,0),(1,2,3),(0,0,1)\}$ est de bon cardinal, donc comme elle est libre (à vérifier bien sûr, avant de l'affirmer ! laissé en exercice), elle est une base de $\mathbb{R}^3$.
Donc d'après la phrase 6, $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Remarque : après avoir posé un G, vous auriez bien sûr pu choisir une autre phrase pour justifier que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ (phrase 4 par exemple) : j'ai gardé la phrase 6 car elle est rapide, et en plus, c'est cette phrase qui nous a permis de deviner comment choisir G ....

Corrigé de l'exercice 5 :
On peut commencer par réecrire E sous forme d'un vect (pour utiliser la faire phrase 4 ou 6).
Or $\{x-3y+4z=0 \Leftrightarrow \{x=3y-4z$ d'où $E=\{(3y-4z,y,z),y,z\in\mathbb{R}\}=Vect((3,1,0),(-4,0,1))$.
Ensuite est-il préférable de choisir la phrase 4 ou la phrase 6 ?
Lorsque vous voyez dans la question "donner une base adaptée à la somme directe", je vous conseille de passer directement par la phrase 6, comme çà vous aurez toute la réponse d'un coup !

Regardons la famille obtenue par concaténation $\{(3,1,0),(-4,0,1),(1,0,0)\}$: il faut montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$ (et ce sera alors une base dite adaptée à la somme directe d'après le théorème). Or elle compte 3 vecteurs et $dim(\mathbb{R}^3)=3$, donc elle est de bon cardinal, et il suffit de montrer (par exemple) qu'elle est libre.
Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $a(3,1,0)+b(-4,0,1)+c(1,0,0)=(0,0,0)$.
On en déduit le système $\begin{cases} 3a-4b+c &=0\\ a &=0\\ b &=0\end{cases} \Leftrightarrow \{a=b=c=0.$
Donc la famille {(3,0,1), (-4,0,1), (1,0,0)} est bien une base de $\mathbb{R}^3$, donc $E\oplus F=\mathbb{R}^3$ et cette base est adaptée à la somme directe par construction : $\{\underbrace{(3,0,1),(-4,0,1)}_{\in E},\underbrace{(1,0,0)}_{\in F}\}$

$\boxed{\longrightarrow \text{ que signifie "base adaptée à la somme directe } E\oplus F \text{" ?}}$

Une base est dite adaptée à la somme directe $E\oplus F$, si chaque vecteur de la base appartient à E ou à F.
Par exemple dans l'exercice 5, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ n'est pas adaptée à la somme directe $E\oplus F=\mathbb{R}^3$, car certes $(1,0,0)\in F$ mais $(0,1,0)\notin F$ et $(0,1,0)\notin E$ (vérifier l'équation : $0-3*1+4*0=-3\neq 0$). De même $(0,0,1)\notin E$.

En revanche, quand vous utilisez la phrase 6, vous partez de la famille obtenue par concaténation des familles génératrices de E et de F, donc forcément vos vecteurs seront soit dans E soit dans F. Donc, vous obtiendrez systématiquement (comme le dit le théorème) une base adaptée à la somme directe.

Corrigé de l'exercice 6 :.
Alors trois points ou vect ?

Si vous regardez la fin de l'énoncé ... il faut une base ... donc inutile de faire les trois points.

Etape 1 : on réécrit F sous forme de Vect.

Soit $P\in\mathbb{R}_n[x]$: P s'écrit $P\ x\mapsto a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ et
$P'\ x\mapsto na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-1}+...+2a_2x+a_1$.
Alors $P\in F\Leftrightarrow \begin{cases} P(0)=0\\ P'(0)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0=0\\ a_1=0\end{cases} \Leftrightarrow P$ s'écrit $P=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2$
d'où $F=Vect(x^n,x^{n-1},...,x^2)$.
Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$,
et on devine que $G=Vect(1,x)$ sera un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[x]$.
Attention, de bien mettre le Vect() dans G : il ne faut pas confondre les représentants du supplémentaire (les représentants du supplémentaire sont "ceux qui manquent"), et tout le sous-espace vectoriel engendré (c'est lui qui est appelé le supplémentaire).

Bref,montrons que $F\oplus G=\mathbb{R}_n[x]$ avec $G=Vect(1,x)$: or la famille obtenue par concaténation des deux familles génératrices est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ donc il n'y a rien à faire ! Conclusion : G ainsi défini est bien un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[x]$, et la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est adaptée à cette somme directe.

Corrigé de l'exercice 7 :

1. Par les trois points : par définition, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,/\,{}^tM=M\}\subset\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
De plus, ${}^t0_n=0_n$ donc $0_n\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\neq\varnothing$.
Enfin, soit $M,N\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors (cf propriétés de la transosée, chapitre matrices) ${}^t(\lambda M+N)=\lambda^tM+^N=\lambda M+N$ par hypothèse $(M,N\in S_n(\mathbb{R}))$.
Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Si vous regardez le théorème principal, le raisonnement par analyse et synthèse revient à la phrase deux. Commençons à la mettre en place, avant de rappeler ce raisonnement. Il faut montrer que pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique décomposition de M de la forme $M=\underbrace{S}_{\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}+\underbrace{A}_{\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$.
Commençons par fixer $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: il faut montrer qu'il existe un unique couple solution (S,A) à notre équation avec $A\in\mathcal{A}_n$ et $S\in\mathcal{S}_n$.

C'est là qu'intervient le raisonnement par analyse et synthèse : rappelez-vous c'est un raisonnement "type brouillon". On commence par supposer l'existence de la solution, pour essayer de deviner qui elle peut être (c'est l'analyse), puis (synthèse) on vérifie qu'elle convient.

Analyse : supposons qu'une telle décomposition existe (rappel M est fixé). Donc on a une première équation entre nos inconnues (A et S) : $\boxed{\text{A+S=M}}$.

Comme on a deux inconnues, il nous faut trouver une "bonne" deuxième équation. Comment faire ?

Il faut bien sûr arriver à utiliser nos hypothèses, à savoir que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

L'idée est donc de regarder la transposée de notre première équation : on trouve ${}^tM =^t A +^t S$ d'où ${}^tM = -A+S$ par hypothèse.

Ca y est ! on a une deuxième équation !

Il nous reste à résoudre le système $\begin{cases} A+S & = M \\ -A+S & =^t M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{1}{2}(M +^t M) \\ A = \frac{1}{2}(M -^t M) \end{cases}$. On obtient un unique couple <u>candidat</u> (attention, on ne peut pas encore affirmer que ce soit un couple <u>solution</u>).

Donc si une solution existe, elle est unique.

Synthèse : vérifions que l'unique candidat trouvé (à savoir $S = \frac{1}{2}(M +^t M)$ et $A = \frac{1}{2}(M -^t M)$) est bien solution. Combien de propriétés doit-on vérifier ? $\boxed{3}$ propriétés ont été posées au départ.

- Vérifier que $A + S = M$: or $A + S = \frac{1}{2}(M -^t M) + \frac{1}{2}(M +^t M) = \frac{1}{2}(2M + 0) = M$
- Vérifier que $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: or d'après les propriétés sur la transposée, ${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM +^t ({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$.
- Vérifier que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: or ${}^tA = \frac{1}{2}({}^tM -^t ({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -\frac{1}{2}(-{}^tM + M) = -A$.

Conclusion : on a bien trouvé l'existence et l'unicité d'un couple (A, S) tel que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et ce pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D'où (c'est la définition de la supplémentarité = phrase 2)) : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3. Lors du raisonnement fait dans l'analyse, on a vu que $M = S + A$

avec $S = \frac{1}{2}(M +^t M) = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

et $A = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 8 :

$F = Vect((1, 1, .., 1))$, et $x_1 + ... + x_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 - x_3 - ... - x_n$

donc $E = \{(-x_2 - .. - x_n, x_2, x_3, ...x_n)$, avec $x_2, ...x_n \in \mathbb{R}\}) = Vect((-1, 1, 0, ..., 0), (-1, 0, 1, 0, ..., 0), ..., (-1, ...0, 0, 1))$.

Piste numéro 1 :

En particulier $dim(F) = 1$ et $dim(E) = n-1$ (attention, famille libre à justifier pour caser le mot base avant de parler de dimension !) d'où $dim(F) + dim(E) = n = dim(\mathbb{R}^n)$.

Puis $E + F = Vect(...)$: piste pas évidente en dimension n.

Deuxième tentative : montrer que $E \cap F = \{0\}$ par double inclusion.

$0 \in E \cap F$ donc il suffit de montrer que $E \cap F \subset \{0\}$.

Soit $x \in E \cap F$, alors comme $x \in F$, x s'écrit $x = (\lambda, \lambda, ...\lambda)$, et comme $x \in E$, on obtient : $\lambda + \lambda + ... + \lambda = 0$ d'où $n\lambda = 0$ d'où $\lambda = 0$ et finalement, $x = 0$. Conclure.

$\boxed{\text{Variante (plus rapide !) via la phrase 6.}}$: montrer que la famille obtenue par concaténation à savoir la famille $\{(1, 1, ..., 1), (-1, 1, 0, ..., 0), (-1, 0, 1, 0, ..., 0), ..., (-1, 0, ..., 0, 1))\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. En effet, comme elle est de bon cardinal puisque $dim(\mathbb{R}^n) = n$, il suffit de montrer qu'elle est libre. (Certes le système est de taille n, mais il se résout immédiatement car dès la deuxième ligne, une seule inconnue par équation !)

Soit a_1, ... ,a_n des réels tels que $a_1(1, ..., 1) + a_2(-1, 1, 0, ..., 0) + ... + a_n(-1, 0, ..., 0, 1) = (0, ..., 0)$.

Alors $\begin{cases} a_1 - a_2 - ... - a_n = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ ... \\ a_n = 0 \end{cases}$ d'où $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Variante bis : passer par analyse et synthèse.

Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Le but est de montrer qu'il existe un unique couple $(y, z) \in E \times F$ tel que $x = y + z$.

Analyse : supposons qu'une telle écriture existe. Alors comme $z \in F$, z s'écrit $(\lambda, ..., \lambda)$, et comme $y = (y_1, ..., y_n) \in E$, $y_1 + ... + y_n = 0$. D'où $x_1 + ... + x_n = y_1 + ... + y_n + \lambda + .. + \lambda = 0 + n\lambda$.

En particulier, $\lambda = \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$ (ne pas oublier qui est fixé "connu", qui est inconnu!). Il reste à poser $y = x - z = (x_1, ..., x_n) - \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n, x_1 + ... + x_n, ..., x_1 + ... + x_n)$.
On remarque qu'il y a au plus une solution.
Synthèse : soit le candidat ci-dessus, et vérifions qu'il est bien solution. On a bien $z \in F$, et de manière évidente, $x = y + z$ (vu la construction).
Il reste donc à justifier que $y \in E$: or $y_1 + ... + y_n = x_1 + ... + x_n - \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n) - \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n) - ... - \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n) = x_1 + ... + x_n - n\frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n) = 0$
Conclure.

Corrigé de l'exercice 9

Rappel : $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On a $I \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et si g est la fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$,$\forall x \in \mathbb{R}\ -x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = 0 = -0 = -g(x)$ donc $g \in I$.
   Soit maintenant, $f, g \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et
   $\lambda f(-x) + g(-x) = \lambda(-f(x)) - g(x)) = -(\lambda f(x) + g(x))$, donc $\lambda f + g \in I$.
   Conclure : I est bien un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et de même pour P.
2. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrons qu'il existe un unique couple de fonction $(g, h) \in I \times P$ tel que $f = g + h$, par analyse et synthèse.
   Analyse : supposons qu'un tel couple existe : donc f s'écrit $f = g + h$ avec $g \in I$ et $h \in P$
   Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$.
   A x fixé, nous avons donc une relation entre $g(x)$, $h(x)$ et $f(x)$; comme nous avons deux inconnues $g(x)$ et $h(x)$, on essaie de trouver une 2e relation. Au vu des propriétés de h et g, on devine qu'il faut regarder en $-x$.
   Suite rédaction : vu les appartenances à I et P,
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = g(-x) + h(-x) = -g(x) + h(x)$.
   On obtient donc le système suivant pour tout $x \in \mathbb{R}$: (rappel, f est "connue", les inconnues sont g et h)
   $\begin{cases} g(x) + h(x) &= f(x) \\ -g(x) + h(x) &= f(-x) \end{cases}$ d'où après résolution $\begin{cases} h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}$
   On a donc au plus un couple solution, puisque on a exhibé un unique candidat.
   Synthèse : vérifions que le candidat ci-dessus est bien solution.
   Vq $f = g + h$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) + h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f(x)$.
   Vq $g \in I$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(-(-x))) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -g(x)$.
   Vq $h \in P$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $h(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(-(-x))) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = h(x)$.
   Il ne reste plus qu'à conclure!
3. Posons $f : x \mapsto x+1$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = \frac{1}{2}(x+1-(-x+1)) = x$ et $h(x) = .. = 1$.
   Posons $f : x \mapsto e^x$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ et $h(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ d'où $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Corrigé de l'exercice 10 :

La rédaction est détaillée dans l'exercice 11. Ici, je ne marque que les résultats.
J'espère que vous avez procédé à la méthode du pivot pour la résolution du système (pour le noyau), et que vous avez pensé à marquer les opérations.
$Ker(f) = \{(-z, z, z), z \in \mathbb{R}\} = Vect((-1, 1, 1))$,
et $Im(f) = Vect((1, 1, 0), (2, 0, 1), (-1, 1, -1)) = Vect((1, 1, 0), (0, -2, 1), (0, 2, -1)) = Vect((1, 1, 0), (0, 2, -1))$.
Il reste à appliquer le th du rang pour obtenir $dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^3)$.
Par ailleurs, $Ker(f) + Im(f) = Vect(...) = ... = Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) = R^3$.
D'où $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$, et $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Corrigé de l'exercice 11 :

1. Petite révision!
   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $(x, y, z) \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y + z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$ d'où $Ker(f) = \{(0, -z, z), z \in \mathbb{R}\} = Vect((0, -1, 1))$. Puis pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f \circ f((x, y, z,)) = f(f(x, y, z)) = f(x, y + z, y + z) = (x, (y + z) + (y + z), (y + z) + (y + z)) = (x, 2y + 2z, 2y + 2z)$.
   D'où $(x, y, z) \in Ker(f^2) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ 2y + 2z &= 0 \\ 2y + 2z &= 0 \end{cases}$ ... on retombe bien sur le même système donc
   $Ker(f^2) = Vect(0, -1, 1) = Ker(f)$.
   De même, $Im(f) = Vect(f((1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) = Vect((1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 1)) = Vect((1, 0, 0), (0, 1, 1))$ et $Im(f^2) = Vect(f^2((1, 0, 0), f^2(0, 1, 0), f^2(0, 0, 1)) = Vect((1, 0, 0), (0, 2, 2), (0, 2, 2)) = Vect((1, 0, 0), (0, 1, 1)) = Im(f)$ (en multipliant par $1/2 \neq 0$ le deuxième vecteur).

2. Premier exemple avec une application linéaire : commencer par rappeler le théorème du rang. De ce fait, quelle(s) phrase(s) allez-vous choisir ?
   Phrases 4 ou 5 : je vous conseille la phrase 4 dans les cas concrets (quand le vect marche bien pour montrer une somme),et la phrase 5 dans les cas plus abstraits.

   Rédaction : D'après le théorème du rang, appliqué à $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^3)$.
   Montrons $Ker(f) + Im(f) = \mathbb{R}^3$: or d'après (a), $Ker(f) + Im(f) = Vect((0,-1,1),(1,0,0),(0,1,1)) = Vect((0,0,1),(1,0,0),(0,1,1))$ $(e_1 \leftarrow e_1 + e_3)$=$Vect((0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)) = \mathbb{R}^3$ $(e_3 \leftarrow e_3 - e_1)$. Ccl.

Corrigé de l'exercice 12

1. Dans le cas où E est de dimension finie, le théorème du rang donne l'égalité des dimensions :
   $dim(E) = dim(Kerf) + dim(Imf)$. Il reste donc à choisir entre les phrases 4 et 5. Dans ce type d'exercices abstraits, je vous conseille de partir directement sur la phrase 5.
   Donc il reste à montrer que $Ker(f) \cap Im(f) = \{\vec{0}\}$: égalité entre deux ensembles ... par double inclusion !
   $Kerf$ et Imf sont des sevs, donc $0 \in Kerf \cap Imf$, càd $\{0\} \subset Kerf \cap Imf$.
   Réciproquement : montrons que $Kerf \cap Imf \subset \{0\}$.
   Soit $\vec{x} \in Kerf \cap Imf$ (but : montrer que $x = 0$). Alors $x \in Ker(f)$ donc $f(x) = 0$ et $x \in Im(f)$ donc il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$.
   En combinant les deux, on en déduit : $0 = f(x) = f(f(a))$ donc $f(f(a)) = 0$. Or $f \circ f = f$ d'où $f(a) = 0$.
   Finalement, $x = f(a) = 0$ Conclure.

2. Montrons que $E = Kerf \oplus Imf$.
   Soit $x \in E$. Le but est de montrer qu'il existe une unique décomposition de $\vec{x}$ sous la forme $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$ avec $\vec{x_1} \in Kerf$ et $\vec{x_2} \in Imf$.
   <u>Analyse</u> : Supposons qu'il existe bien une écriture de la forme $\boxed{\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}}$ avec $\vec{x_1} \in Kerf$ et $\vec{x_2} \in Imf$.
   Alors $\vec{x_2} \in Imf \Rightarrow \exists a \in E$ tel que $\vec{x_2} = f(\vec{a})$
   On a déjà une relation entre $\vec{x}$, $\vec{x_1}$, et $\vec{x_2}$: comme on a deux inconnues, il faut en trouver une de plus. Ici, pour utiliser l'hypothèse $\vec{x_1} \in Ker(f)$ et faire apparaitre f^circf (pour pouvoir utiliser l'hypothèse de l'exercice), on devine que l'on va regarder $f(\vec{x})$.
   Suite rédaction : au vu des notations adoptées ci-dessus, $f(\vec{x}) = \vec{0} + f \circ f(\vec{a}) = f(\vec{a}) = x_2$.
   Donc $\vec{x_2} = f(\vec{x})$ et par suite $\vec{x_1} = \vec{x} - f(\vec{x})$.
   Donc si une telle décomposition existe, elle est unique !
   <u>Synthèse</u> : on vérifie que le couple candidat trouvé précédemment ($\vec{x_1} = \vec{x} - f(\vec{x})$, $\vec{x_2} = f(\vec{x})$) convient bien.
   Il y a donc $\boxed{\text{trois}}$ choses à vérifier : en effet, trois hypothèses apparaissent dans la décomposition, à savoir $\vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{x}$, $\vec{x_1} \in Ker(f)$ et $\vec{x_2} \in Im(f)$. Ce qui donne ici :
   - on a bien $(\vec{x} - f(\vec{x})) + f(\vec{x}) = \vec{x}$
   - de plus, par définitino de $im(f)$, $f(\vec{x}) \in Imf$
   - et $(\vec{x} - f(\vec{x})) \in Kerf$ car par linéarité, $f()\vec{x} - f(\vec{x})) = f(x) - f(f(x)) = 0$ puisque $f = f \circ f$.

   Donc cette décomposition convient bien.
   Vrai pour tout $x \in E$.
   Conclusion : $E = Kerf \oplus Imf$.

Corrigé de l'exercice 13 :

$\Leftarrow$: Supposons $Kerf^2 = Kerf$ et $Imf^2 = Imf$. Montrons que $E = Kerf \bigoplus Imf$, à l'aide de l'énoncé 5.

Etape 1 : d'après le théorème du rang appliqué à $f \in \mathcal{L}(E)$, $dim(Kerf) + dim(Imf) = dim(E)$.

Etape 2 : Montrons que $Kerf \cap Imf = \{\vec{0}\}$.
Par double inclusion : On sait déjà que $\vec{0} \in Kerf \cap Imf$ ($Ker(f)$ et $Im(f)$ sont des sevs !)
Montrons que $Kerf \cap Imf \subset \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in Kerf \cap Imf$. (but : mq que $\vec{x} = 0$).
Or $\vec{x} \in Kerf \Rightarrow f(\vec{x}) = 0$ et $\vec{x} \in Imf \Rightarrow \exists \vec{a} \in E$ tel que $\vec{x} = f(\vec{a})$.
De ces deux hypothèses, on obtient que $f(f(\vec{a})) = f(\vec{x}) = 0$.
D'où $\vec{a} \in Kerf^2$, ce qui implique $\vec{a} \in Kerf$, puisque par hypothèse, $Ker(f^2) = Ker(f)$.
càd, $f(\vec{a}) = 0$. On conclut en remarquant que $x = f(\vec{a}) = 0$.

$\Rightarrow$: Supposons que $E = Kerf \bigoplus Imf$ et montrons que $Kerf^2 = Kerf$ et $Imf^2 = Imf$.

Etape 1 : Montrons $Kerf^2 = Kerf$.
a) montrons $Kerf \subset Kerf^2$ (inclusion vraie pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$) :
soit $\vec{x} \in Kerf$. Alors $f(\vec{x}) = \vec{0}$ d'où $f(f(\vec{x})) = f(\vec{0}) = 0$ car f linéaire.

On en déduit $\vec{x} \in Kerf^2$.

b) montrons $Kerf^2 \subset Kerf$.
Soit $\vec{x} \in Kerf^2$. Alors $f(f(\vec{x})) = 0$
On en déduit que $f(\vec{x}) \in Kerf$. Par ailleurs, on sait que $f(\vec{x}) \in Imf$. D'où $f(\vec{x}) \in Kerf \cap Imf = \{\vec{0}\}$, puisque la somme est directe. On obtient $f(\vec{x}) = \vec{0}$ càd $\vec{x} \in Kerf$.

Etape 2 : Montrons que $Imf^2 = Imf$
a) montrons que $Imf^2 \subset Imf$ (inclusion vraie pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$) :
Soit $\vec{x} \in Imf^2$. Alors il existe $\vec{a} \in E$ tel que $\vec{x} = f(f(\vec{a}))$. D'où en posant $\vec{b} = f(\vec{a})$ on obtient que $\vec{x} = f(\vec{b}) \in Imf$.

b) Variante 1 : montrons que $dim(Imf) = dim(Imf^2)$.
Or d'après le théorème du rang appliqué à f, $dim(Imf) = dim(E) - dim(Kerf)$
et d'après le théorème du rang appliqué à f^2, $dim(Imf^2) = dim(E) - dim(Kerf^2)$
On conclut en remarquant que $Kerf = Kerf^2 \Rightarrow dim(Kerf) = dim(Kerf^2)$.

Variante 2 : montrons que $Imf \subset Imf^2$
Soit $\vec{x} \in Imf$. Alors il existe $\vec{a} \in E$ tel que $\vec{x} = f(\vec{a})$.
Mais $\vec{a} \in E = Kerf \bigoplus Imf$ implique qu'il existe $\vec{a}_1 \in Kerf$ et $\vec{a}_2 \in Imf$ tel que $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$.
Si on traduit les hypothèses, on a que $f(\vec{a}_1) = 0$ et qu'il existe $\vec{b} \in E$ tel que $\vec{a}_2 = f(\vec{b})$.
Finalement, on obtient que $\vec{a} = \vec{a}_1 + f(\vec{b})$ d'où $\vec{x} = f(\vec{a}) = 0 + f(f(\vec{b}))$ (par linéarité).
D'où $\vec{x} \in Imf^2$.

Corrigé de l'exercice 14

1. Via la phrase 5.
   Etape 1 : Montrons que $Ker(\varphi) \cap Im(\varphi^2) = \{0\}$.
   On sait déjà $\vec{0} \in Ker(\varphi) \cap Im(\varphi^2)$ donc il suffit de montrer que $Ker(\varphi) \cap Im(\varphi^2) \subset \{0\}$.
   Soit $x \in Ker(\varphi) \cap Im(\varphi^2)$: alors $\varphi(x) = 0$ et il existe $a \in E$ tel que $x = \varphi^2(a)$.
   en combinant les deux, on trouve : $0 = \varphi(x) = \varphi^3(a) = \varphi(a)$ puisque $\varphi^3 = \varphi$ par hypohèse. Mais si $\varphi(a) = 0$ alors $x = \varphi^2(a) = \varphi(0) = 0$ puisque φ est linéaire.
   D'où $x = 0$. Conclure.

   Etape 2 : montrer que $dim(Ker(\varphi)) + dim(Im(\varphi^2)) = dim(E)$.
   D'après le théorème du rang, comme E de dimension finie, $dim(Ker(\varphi)) + dim(Im(\varphi))) = dim(E)$.
   Il reste à montrer que $dim(Im(\varphi^2)) = dim(Im(\varphi)$.
   Or (cf exercice de la feuille précédente), il est assez facile de montrer que $Im(\varphi^3) \subset Im(\varphi^2) \subset Im(\varphi)$ mais comme $\varphi^3 = \varphi$, on a $Im(\varphi^3) = Im(\varphi)$ d'où $Im(\varphi^3) = Im(\varphi^2) = Im(\varphi)$, et $dim(Im(\varphi^2)) = dim(Im(\varphi))$.

2. Sans supposer E de dimension finie, il ne nous reste plus beaucoup de méthodes possibles. Ici, le raisonnement par analyse et synthèse ne marche pas bien car en posant $x = x_1 + x_2$ (...) et en regardant $\varphi(x)$, cela ne nous permet pas (contrairement aux autres exos du même type) de trouver x_1 et x_2.)
   On va donc utiliser la phrase 3 en essayant de deviner une décomposition.
   Rédaction : motrons que $E = Ker(\varphi) + Im(\varphi^2)$.
   Soit $x \in E$: le but est d'écrire $x = ... + ...$ avec deux vecteurs dans les bons ensembles.
   On remarque (oui c'est un peu astucieux ...) $x = (x - \varphi^2(x)) + \varphi^2(x)$.
   On vérifie facilement que $(x - \varphi^2(x)) \in Ker(\varphi)$: par linéarité $\varphi(x - \varphi^2(x)) = \varphi(x) - \varphi^3(x) = 0$ par hypothèse.
   Et par définition, $\varphi^2(x) \in Im(\varphi^2)$.
   C'est gagné ! Donc $E = Ker(\varphi) + Im(\varphi^2)$, et d'après le 1. on a aussi $Ker(\varphi) \cap Im(\varphi^2) = \{0\}$ (on n'avait pas utilisé la dimension finie de E dans cette étape).
   Conclure.

Corrigé de l'exercice 15

1. (a) $J^2 = I$ donc $J \times J = I$ donc J est inversible d'inverse $J^{-1} = J$.
   (b) Linéarité : pour tout M et $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α réel,
   $S(\alpha M + N) = J(\alpha M + N)J = \alpha JMJ + JNJ = \alpha S(M) + S(N)$.
   Donc S est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Noyau de S : Soit $M \in KerS$. Alors $JMJ = 0 \Rightarrow$ (mult. à droite par J^{-1}) $JM = 0 \Rightarrow M = 0$.
   Donc $KerS = \{0\}$ et S est injective. Comme on est en dimension finie, S est bijective.
   Donc S est un isomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Isomorphisme réciproque : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On résout $S(M) = A$.

Or $JMJ=A \Leftrightarrow M=J^{-1}AJ^{-1}=JAJ=S(A)$. D'où $S^{-1}=S$.
Raccourci : une fois la linéarité montrée, remarquer que comme $J^2=I$, alors $S\circ S=id$ d'où S est bijective de réciproque $S^{-1}=S$ (cf théorème chapitre ensemble et application)

(c) pour $M,N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $S(M)S(N)=JMJJNJ=JMINJ=JMNJ=S(MN)$ car $J^2=I$.

2. (a) $\mathcal{F}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et comme $S(0)=0$ car S est linéaire, on trouve $0\in\mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}\neq\varnothing$.
Soit $M,N\in\mathcal{F}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$: comme S est linéaire, $S(\lambda M+N)=\lambda S(M)+S(N)=\lambda M+N$ (car $M,N\in\mathcal{F}$).
D'où $\lambda M+N\in\mathcal{F}$.
Même raisonnement pour $\mathcal{G}$.

(b) Soit $M\in\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$: on raisonne par analyse et synthèse.
Supposons qu'une telle décomposition existe alors $M=M_++M_-$ avec $M_+\in\mathcal{F}$ et $M_-\in\mathcal{G}$.
On en déduit (par linéarité) que $S\left(M\right)=S\left(M_+\right)+S\left(M_-\right)=M_+-M_-$ d'où (système à 2 équations 2 inconnules) $M_+=\frac{1}{2}\left(M+S\left(M\right)\right)$ et $M_-=\frac{1}{2}\left(M-S\left(M\right).\right)$
Si une telle décomposition eixste, alors elle est unique.
Synthèse : soit à présent $M_+=\frac{1}{2}\left(M+S\left(M\right)\right)$ et $M_-=\frac{1}{2}\left(M-S\left(M\right)\right)$. Ces valeurs conviennent-elle ?
$S\left(M_+\right)=\frac{1}{2}\left[S\left(M\right)+S\left(S\left(M\right)\right)\right]$ et comme $S\circ S=id$, on obtient $S\left(M_+\right)=\frac{1}{2}\left(S\left(M\right)+M\right)=M_+$ donc $M_+\in\mathcal{F}$.
De même $S\left(M_-\right)=-M_-$ et $M_-\in\mathcal{G}.$; et on a bien $M_++M_-=M$.
Conclusion : M_+ et M_- existent et sont uniques. On en déduit que $\mathcal{F}\bigoplus\mathcal{G}=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Après calculs, on trouve $S(A)=\begin{pmatrix}-2&1\\-1&3\end{pmatrix}$ Donc $A_+=\dfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}3&-1\\1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&1\\-1&3\end{pmatrix}\right]=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $A_-=\dfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}3&-1\\1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&1\\-1&3\end{pmatrix}\right]=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-2\\2&-5\end{pmatrix}$

3. (a) Si $M,N\in\mathcal{F}$ alors par 1.c), $S\left(MN\right)=S(M)S(N)=MN$ donc $MN\in\mathcal{F}$.
Si M et N appartiennent à $\mathcal{G}$ alors $S\left(MN\right)=S(M)S(N)=-M\left(-N\right)=MN$ donc $MN\in\mathcal{F}$.
et si l'un est dans $\mathcal{F}$ et l'autre dans G, le produit est dans $\mathcal{G}$.

(b) Soient $M,N\in\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$, alors $MN=\left(M_++M_-\right)\left(N_++N_-\right)=M_+N_++M_+N_-+M_-N_++M_-N_-$
$=\left(M_+N_++M_-N_-\right)+\left(M_+N_-+M_-N_+\right)$. Or par 3.a) $\left(M_+N_++M_-N_-\right)\in\mathcal{F}$ et
$\left(M_+N_-+M_-N_+\right)\in\mathcal{G}$ donc par unicité d'une telle décomposition (2. b), on obtient
$(MN)_+=M_+N_++M_-N_-$ et $(MN)_-=M_+N_-+M_-N_+$

Corrigé de l'exercice 16

1. $v-w=id$. Autrement dit, pour tout $x\in E$, $v(x)-w(x)=x$. Soit encore $x=v(x)+w(-x)\in Im(v)+Im(w)$.
On en déduit $E\subset Im(v)+Im(w)$. Comme par définition de la somme de sevs on a $Im(v)+Im(w)\subset E$, on obtient $E=Im(v)+Im(w)$.

2. $v\circ w=(u-id)\circ(u-2id)=u\circ u+u\circ(-2id)-id\circ u-id\circ(-2id)=u^2-3u+2id=0$. Montrons que $Im(w)\subset Ker(v)$: soit $x\in Im(w)$. Alors il existe $a\in E$ tel que $x=w(a)$. D'où $v(x)=v(w(a))=v\circ w(a)=0$.
On obtient bien $x\in Ker(v)$.
Le reste de la question se fait de la même manière.

3. D'après 1. et 2., on obtient $E=Im(v)+Im(w)\subset Ker(w)+Ker(v)\subset E$ (la dernière inclusion provient de $Ker(v)$ et $Ker(w)$ sevs de E). D'où $E=Ker(v)+Ker(w)$.
Il reste à montrer que $Ker(v)\cap Ker(w)=\{0\}$: on sait que $0\in Ker(v)\cap Ker(w)$ donc il suffit de montrer qu'il n'y en a pas d'autres.
Soit $x\in Ker(v)\cap Ker(w)$: alors $v(x)=0$ et $w(x)=0$. D'où $u(x)=x$ et $u(x)=2x$ par définition de v et w.
On en déduit que $x=2x$ soit encore $x=0$.
Ou (plus court) utiliser la 1. $x=v(x)-w(x)=0-0=0$.
Finalement, on a bien $E=Ker(v)\bigoplus Ker(w)$.

Corrigé de l'exercice 17 :

1. (a) D'après la définition, $tr(I_n)=1+1+...+1=n$.

(b) Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé. Infinité de solutions ! Par exemple, il suffit de poser A la matrice qui ne contient que des 0 sauf le premier coefficient diagonal (ligne 1 colonne 1) égal à x. Alors $tr(A)=x$.

2. (a) Rappel : une forme linéaire est une application linéaire dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{K}$ (ici $\mathbb{R}$).
Linéarité : soit $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $\lambda A+B=(\lambda a_{ij}+b_{ij})$ donc $tr(\lambda A+B)=\sum\limits_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii}+b_{ii})=\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ii}$ (par linéarité de la somme) $=\lambda tr(A)+tr(B)$. Donc la trace est linéaire, et comme $tr:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, tr est bien une forme linéaire.

(b) On sait déjà $Im(tr) \subset \mathbb{R}$.
méthode 1 : d'après 1.(b), on obtient l'autre inclusion (ce qui se traduit aussi par tr est surjective) puisque tout $x \in \mathbb{R}$ peut s'écrire $x = tr(A) \in Im(tr)$. Donc $Im(tr) = \mathbb{R}$.
Ou méthode 2 : comme $Im(tr) \subset \mathbb{R}$, on a $dim(Im(tr)) \leq 1$. Comme par ailleurs, tr est non-nulle, $dim(Im(tr)) \geq 1$, d'où $dim(Im(tr)) = 1 = dim(\mathbb{R})$, d'où avec la première inclusion, $Im(tr) = \mathbb{R}$.
Méthode 3 (n'utilise pas l'inclusion de départ) : passer par $Im(tr) = Vect(tr(E_{11}), tr(E_{12}), ..., tr(E_{nn}) = Vect(1) = \mathbb{R})$ car pour tout i, $tr(E_{ii}) = 1$ et pour tout $i \neq j$, $tr(E_{ij}) = 0$.
Puis théorème du rang, $dim(Ker(tr)) = dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - rg(tr) = n^2 - 1$.

(c) Par double inclusion :
On sait $0_n \in Ker(tr) \cap Vect(I_n)$ (sevs). Réciproquement, montrons que $Ker(tr) \cap Vect(I_n) \subset \{0_n\}$.
Soit $A \in Ker(tr) \cap Vect(I_n)$: $A \in Vect(I_n) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$. Puis $A \in Ker(tr) \Rightarrow tr(A) = 0$. Or comme $A = \lambda I_n$, $tr(A) = \lambda tr(I_n) = n\lambda$. D'où $tr(A) = 0 \Leftrightarrow n\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ puisque $n \neq 0$.
D'où $A = 0 I_n = 0_n$.

(d) De (a), on obtient $dim(Ker(tr)) + dim(Vect(I_n)) = n^2 - 1 + 1 = n^2 = dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
Donc avec (b), on obtient : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = Ker(tr) \bigoplus Vect(I_n)$

3. (a) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(\alpha A + B) = (\alpha A + B) + tr(\alpha A + B) I_n$
$= \alpha A + B + (\alpha tr(A) + tr(B)) I_n$ (par linéarité de tr), $= \alpha f(A) + f(B)$.

(b) 0 est solution. Réciproquement, soit M une solution. Alors $M + tr(M) I_n = 0$ (*). En appliquant la trace (linéaire) à cette équation : $tr(M) + tr(M) tr(I_n) = 0$. D'où $(n+1) tr(M) = 0$ et $tr(M) = 0$.
En revenant à (*) : $M + 0 = 0$, donc $M = 0$.

(c) D'après (b), f est injective ; comme la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est finie, on obtient que f est bijective (dernier théorème du chapitre "ev de dimension finie").

Corrigé de l'exercice 18 :

1. Rappels : Un sev de E est un hyperplan de E si il est de dimension $n - 1$ où $n = dim(E)$.
Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
φ non-nulle signifie qu'il existe $\vec{v} \in E$ tel que $\varphi(v) \neq \vec{0}$.

2. Supposons qu'il existe une forme linéaire non nulle f telle que $H = Ker f$.
Alors $rg(f) = 1$: en effet, comme f est une forme linéaire, $Im f \subset \mathbb{K}$ d'où $rg(f) \leq 1$. Puis f étant non nulle, $dim(Im f) \geq 1$ (car $dim(Im f) = 0 \Leftrightarrow Im f = \{0\} \Leftrightarrow f = 0$).
D'où $rg(f) = 1$.
D'après le théorème du rang, on en déduit que $dim(Ker f) = n - 1$: le noyau est un hyperplan de E.

3. (a) Comme H est un hyperplan : $dim(H) = n - 1$.
De plus, on sait que H admet des supplémentaires : soit G l'un d'entre eux. On a alors $E = H \oplus G$ et $dim(G) = n - (n-1) = 1$ donc G est une droite vectorielle : il existe $\vec{e} \neq \vec{0}$ tel que $G = Vect(\vec{e})$.

(b) φ est bien définie, car par définition de la somme directe, tout vecteur $\vec{x} \in E$, s'écrit de manière unique $\vec{x} = \vec{x_H} + \lambda \vec{e}$, avec $\vec{x_H} \in H$, d'où par linéarité, $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_H) + \lambda \varphi(\vec{e}) = 0 + \lambda = \lambda$.

(c) De plus, avec les notations du (a) $\varphi(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{x_H} \in H$. D'où $H = Ker(\varphi)$.