Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille "Compléments d'analyse"

Corrigé de l'exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé quelconque.

Etude de $f_1 : x \mapsto xe^{-x}$.

Posons $g : x \mapsto x$ et $h : x \mapsto e^{-x}$. g et h sont des fonctions usuelles de classe C^n (ou même C^∞) sur $\mathbb{R}$, donc par produit, f_1 est de classe C^n (ou C^∞) sur $\mathbb{R}$. La formule de Leibniz permet alors d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x).$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1$ et donc pour $k \geq 2$, $g^{(k)}(x) = 0$.
et $h'(x) = -e^{-x}$, $h''(x) = e^{-x}$, etc. : pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $h^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$.

Finalement, en revenant à la somme, à l'aide d'une relation de Chasles, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_1^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} g^{(0)}(x) h^{(n)}(x) + \binom{n}{1} g^{(1)}(x) h^{(n-1)}(x) + \sum_{k=2}^n g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) \\ &= x(-1)^n e^{-x} + n \times 1 \times (-1)^{n-1} e^{-x} + 0 = (-1)^{n-1} e^{-x} (-x + n). \end{aligned}$$

Etude de $f_2 : x \mapsto x^2 e^x$.

Est vraiment dans le même esprit puisque f_2 est un produit de 2 fonctions usuelles, dont l'une aura des dérivées successives rapidement nulles ...

Posons $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto e^x$. g et h sont des fonctions usuelles de classe C^n (ou même C^∞) sur $\mathbb{R}$, donc par produit, f_2 est de classe C^n (ou C^∞) sur $\mathbb{R}$. La formule de Leibniz permet alors d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x).$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$ et donc pour $k \geq 3$, $g^{(k)}(x) = 0$.
et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $h^{(k)}(x) = e^x$.

Finalement, en revenant à la somme, à l'aide d'une relation de Chasles, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_2^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} g^{(0)}(x) h^{(n)}(x) + \binom{n}{1} g^{(1)}(x) h^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} g^{(2)}(x) h^{(n-2)}(x) + 0 \\ &= x^2 e^x + n \times 2x e^x + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 e^x = e^x (x^2 + 2nx + n(n-1)). \end{aligned}$$

Etude de $f_3 : x \mapsto (ax + b)^k$ où k est un entier naturel fixé.

f_3 est une fonction polynomiale donc est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. De plus, si $a \neq 0$, elle est de degré k (et sinon, de degré 0), donc pour tout $n \geq k + 1$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_3^{(n)}(x) = 0$.

Si maintenant $n \leq k$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= ka(ax + b)^{k-1} \\ f_3''(x) &= k(k-1)a^2(ax + b)^{k-2} \end{aligned}$$

⋮

$$f_3^{(n)}(x) = k(k-1) \cdots (k-n+1) a^n (ax + b)^{k-n} \text{ par itération.}$$

Etude de $f_4 : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Attention, pas de formule pour un quotient (ou une composée).

Méthode : on devine la forme sur les premières dérivées, puis on le montre par récurrence.

Au préalable, on n'oublie pas de faire une belle phrase pour justifier la classe C^n .

$x \mapsto 1 - x$ est de classe C^n (ou C^∞) sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et ne s'y annule pas, donc par quotient, f_4 est de classe C^n (ou C^∞) sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Brouillon : Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f_4(x) = (1-x)^{-1}$ donc $f_4'(x) = -(-(1-x)^{-2}) = (1-x)^{-2}$, $f_4''(x) = 2(1-x)^{-3}$, $f_4^{(3)}(x) = 3 \times 2(1-x)^{-4}$, $f_4^{(4)}(x) = 4 \times (3 \times 2(1-x)^{-5})$.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, "pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f_4^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)} (= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}})$ "

Cas $n = 0$: soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors $f_4^{(0)}(x) = f_4(x) = \frac{1}{1-x}$ et $0!(1-x)^{-(0+1)} = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}$.

Supposons maintenant que pour un certain n , on a : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f_4^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$.

Montrons que pour ce n : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f_4^{(n+1)}(x) = (n+1)!(1-x)^{-(n+2)}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors comme $f_4^{(n)}$ est de la forme u^α (à la constante multiplicative $n!$ près), de dérivée $\alpha u' u^{\alpha-1}$, on

obtient :

$$f_4^{(n+1)}(x) = (f_4^{(n)})'(x) = n! \times (-n+1)(-1)(1-x)^{-(n+1)-1} = n!(n+1)(1-x)^{-n-2} = (n+1)!(1-x)^{-(n+2)}.$$

Il vous reste à conclure cette récurrence !.

Pour vous rassurer : souvent, le résultat sera donné dans la question. Il vous suffira donc de faire directement la récurrence (le brouillon ne sera plus nécessaire.)

Etude de $f_5 : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2} = (x-1)^{-2}$. Même esprit que f_4 .

Commencer par la phrase blabla ...

$$\text{Brouillon : (pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : f_5'(x) = -2(x-1)^{-3}, f_5''(x) = -2 \times (-3)(x-1)^{-4} = 2 \times 3(x-1)^{-4}, f_5^{(3)}(x) = -2 \times 3 \times 4(x-1)^{-5} \dots$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{'' pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f_5^{(n)}(x) = (n+1)!(-1)^n(x-1)^{-(n+2)} (= \frac{(n+1)!(-1)^n}{(1-x)^{n+2}}) \text{''}$$

Coeur de l'hérédité, avec $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ fixé,

$$f_5^{(n+1)}(x) = (f_5^{(n)})'(x) = (-1)^n(n+1)![-(n+2)(x-1)^{-(n+2)-1}] = (-1)^{n+1}(n+2)!(x-1)^{-(n+3)}.$$

Conclure.

Etude de $f_6 : x \mapsto \frac{1}{ax+b}$, avec $a \neq 0$ (sinon fonction constante de dérivées successives toutes nulles).

Phase blabla sur $\mathbb{R} \setminus \{-b/a\}$.

$$\text{Brouillon, avec } x \in \mathbb{R} \setminus \{-b/a\} : f_6(x) = (ax+b)^{-1}, f_6'(x) = -a(ax+b)^{-2}, f_6''(x) = 2a^2(ax+b)^{-3}, f_6^{(3)}(x) = -2 \times 3 \times a^3(ax+b)^{-4} \dots$$

Il reste alors à montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{'' pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-b/a\}, f_6^{(n)}(x) = n!(-1)^n a^n (ax+b)^{-(n+1)} (= \frac{n!(-1)^n a^n}{(1-x)^{n+1}}) \text{''}$$

Corrigé de l'exercice 2 :

- $x \mapsto 1-x^2$ est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$, comme fonction polynomiale, et y est strictement positive. Donc par composition avec la fonction racine, qui est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ et ne s'y annule pas. Donc par inverse, f est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.
- Raisonnement par récurrence. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\text{'' il existe un polynôme } P_n \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que pour tout } x \in] -1, 1[, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}}}\text{''}.$$

Cas $n=0$: pour tout $x \in] -1, 1[, f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{0+1}{2}}}$ donc en posant $P_0(X) = 1$, on a bien la forme voulue.

Supposons que pour un certain entier n , on a trouvé un polynôme P_n tel que pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}}}. \text{ Le but est de trouver un polynôme, qu'on appellera } P_{n+1}, \text{ qui permettra d'avoir la}$$

$$\text{forme voulue pour } f^{(n+1)} \text{ à savoir que pour tout } x \in] -1, 1[, f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{\frac{2(n+1)+1}{2}}} = \frac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{\frac{2n+3}{2}}}.$$

Soit $x \in] -1, 1[$. Alors par définition, $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$.

Deux façons de faire : soit on réécrit $f^{(n)}$ pour le voir sous la forme d'un produit, soit on le dérive sous la forme initiale du quotient.

$$\textbf{Méthode 1} : f^{(n)}(x) = P_n(x)(1-x^2)^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

$$\text{Alors } f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = P_n'(x)(1-x^2)^{-\frac{2n+1}{2}} + P_n(x)(-\frac{2n+1}{2})(-2x)(1-x^2)^{-\frac{2n+1}{2}-1}$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{2n+1}{2}-1} [P_n'(x)(1-x^2) + P_n(x) \times (2n+1)x]$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{2n+3}{2}} [P_{n+1}'(x)] \text{ si l'on pose } P_{n+1}(X) = P_n'(X)(1-X^2) + P_n(X) \times (2n+1)X, \text{ qui est bien un polynôme (comme somme et produit de polynômes).}$$

Si la factorisation à l'étape 3, vous a perdu, entraînez vous à factoriser $aX^3 + bX^2$, puis $aX^n + bX^{n-1}$.

Méthode 2 : via la formule de la dérivée d'un quotient.

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \frac{P_n'(x)(1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}} - P_n(x) \frac{2n+1}{2}(-2x)(1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}-1}}{((1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}})^2}$$

$$= \frac{(1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}-1} \times (P'_n(x) \times (1-x^2) - P_n(x) \times (2n+1)x)}{(1-x^2)^{2n+1}} \text{ or } \frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^{b-a}} \text{ et } 2n+1 - (\frac{2n+1}{2} - 1) = \frac{2n+3}{2} \text{ d'où}$$

$$= \frac{P'_n(x)(1-x^2) - (2n+1)xP_n(x)}{(1-x^2)^{\frac{2n+3}{2}}} = \frac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{\frac{2n+3}{2}}} \text{ si l'on pose } P_{n+1}(X) = P'_n(X)(1-X^2) + P_n(X) \times (2n+1)X,$$

qui est bien un polynôme (comme somme et produit de polynômes).

Si la factorisation à l'étape 3, vous a perdu, entraînez vous à factoriser $aX^3 + bX^2$, puis $aX^n + bX^{n-1}$.

3. Révision du chapitre polynômes! On ne connaît pas le polynôme P_n , mais on a une relation de récurrence. Montrons donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ par récurrence.

Cas $n = 0$. Dans la question 2., on a montré que $P_0(X) = 1$ donc $\deg(P_0) = 0$.

Supposons que pour un certain n , $\deg(P_n) = n$, et mq $\deg(P_{n+1}) = n+1$.

Or $P_{n+1}(X) = P'_n(X)(1-X^2) + P_n(X) \times (2n+1)X$

De plus, $\deg(P'_n(X)(1-X^2)) = \deg(P'_n) + \deg(1-X^2) = n-1+2 = n+1$ et

$\deg(P_n(X)(2n+1)X) = \deg(P_n) + 1 = n+1$. Donc par somme, comme les degrés des deux termes sont les mêmes, on a seulement $\deg(P_{n+1}(X)) \leq n+1$ (et non $= n+1$ car un télescopage est possible. Reprenez votre chapitre polynômes si besoin!)

Il faut donc être plus précis. Par hypothèse de récurrence, comme $\deg(P_n) = n$,

P_n s'écrit $P_n(X) = a_n X^n + R_n(X)$ où R_n est le reste du polynôme, de degré au plus $n-1$, et $a_n \neq 0$.

Alors $P_{n+1}(X) = P'_n(X)(1-X^2) + P_n(X) \times (2n+1)X$

$= (na_n X^{n-1} + R'_n(X))(1-X^2) + (a_n X^n + R_n(X))(2n+1)X = \dots$

$= X^{n+1} \underbrace{(n+1)a_n}_{\neq 0} + \underbrace{[R'_n(X)(1-X^2) + na_n X^{n-1} + (2n+1)XR_n(X)]}_{\text{de degré} < n+1}$.

D'où $\deg(P_{n+1}) = n+1$.

Conclusion.

Corrigé de l'exercice 3, question 4.

(a) d'après 2. et 3. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} (-2)^n x^n e^{-x^2} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\rightarrow} 0$ d'après les croissances comparées.

(b) Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ réels tels que $a_0 f + a_1 f' + a_2 f'' + \dots + a_n f^{(n)} = 0$.

(le but est de montrer que $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$).

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \dots + a_n f^{(n)}(x) = 0$.

Comme on peut multiplier par $e^{x^2} \neq 0$, on obtient :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a_0 f(x)e^{x^2} + a_1 f'(x)e^{x^2} + \dots + a_n f^{(n)}(x)e^{x^2} = 0$ soit encore (par définition des P_k)

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x) = 0$.

Or les polynômes $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ sont tous non-nuls et de degrés deux à deux distincts, donc ils forment une famille libre d'où $a_0 = 0 = a_1 = \dots = a_n$.

Corrigé de l'exercice 4

1. La continuité en 0 est ici une continuité à droite en 0, puisque f est définie sur $[0, +\infty[$. Pour $x > 0$, $f(x) = e^{-1/x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 0 = f(0)$ puisque $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} +\infty$. Donc f continue en 0.

2. Pour $x > 0$, $f(x) = e^{-x}$, donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Pour $x > 0$: $f(x) = e^{-1/x}$ donc $P_0(X) = 1$ convient.

Pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$ donc $P_1(X) = X^2$ convient puisqu'alors, $P_1(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}$.

Pour $x > 0$, $f''(x) = (-\frac{2}{x^3} e^{-1/x}) + \frac{1}{x^2} (\frac{1}{x^2}) e^{-1/x} = (\frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x^4}) e^{-1/x}$ donc $P_2(X) = -2X^3 + X^4$ convient puisqu'alors $P_2(\frac{1}{x}) = -2(\frac{1}{x})^3 + (\frac{1}{x})^4$.

On a fait bien plus qu'une initialisation, donc enchaînons avec l'hérédité.

Supposons qu'on a trouvé pour un certain n un polynôme P_n tel que pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-x}$.

Alors pour $x > 0$, $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-\frac{1}{x^2} P'_n(\frac{1}{x}))e^{-1/x} + P_n(\frac{1}{x})(\frac{1}{x^2} e^{-1/x}) = (-\frac{1}{x^2} P'_n(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2} P_n(\frac{1}{x}))e^{-1/x}$.

On en déduit que $P_{n+1}(x) = -x^2 P'_n(x) + x^2 P_n(x)$ convient car c'est bien un polynôme, et de plus, pour $x > 0$,

$P_{n+1}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} P'_n(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2} P_n(\frac{1}{x})$ donc on a bien, pour $x > 0$, $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\frac{1}{x})e^{-1/x}$.

Conclure.

4. Petit rappel : un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est égal à 1.

Ce résultat se montre par récurrence

$n = 0$: $P_0 = 1$ donc P_0 polynôme unitaire de degré $0 = 2 * 0$.

Supposons que P_n soit unitaire de degré $2n$: alors P_n s'écrit $P_n = x^{2n} + R_n$, avec $R_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$.

Alors comme $P_{n+1}(x) = -x^2 P'_n(x) + x^2 P_n(x)$, on obtient

$P_{n+1}(x) = -x^2(2nx^{2n-1} + R'_n(x)) + x^2(x^{2n} + R_n(x)) = x^{2n+2} + [-2nx^{2n+1} - x^2 R'_n(x) + x^2 R_n(x)]$.

Il est facile de montrer que le crochet est un polynôme de degré inférieur à $2n+1$, donc P_{n+1} est bien un polynôme unitaire de degré $2n+2 = 2(n+1)$.

Conclure.

5. ** Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Pour $n = 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}e^{-1/x} = Xe^{-X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ d'après les croissances comparées, en ayant posé $X = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Supposons maintenant que $f^{(n)}$ est dérivable en 0, et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Montrons que $f^{(n+1)}$ est dérivable en 0 : or d'après H.R. et 3.

$\frac{f^{(n+1)}(x)-f^{(n+1)}(0)}{x-0} = \frac{1}{x}P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x} = XP_{n+1}(X)e^{-X}$ (avec le même chgt de variable) donc d'après 4.

$\sim \frac{1}{X} X^{2n+3} e^{-X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. Donc $f^{(n+1)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+2)}(0) = 0$.
Conclure.

Corrigé de l'exercice 5

1. f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}.$$

2. D'après 1. en $n = 2n$ et $k = n$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{2n}^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!}x^n$.

Mais par ailleurs $x^{2n} = x^n \times x^n$ autrement dit $f_{2n} = f_n \times f_n$ donc d'après la formule de Leibniz

$$f_{2n}^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_n^{(k)} \times f_n^{(n-k)} \text{ d'où pour tout } x \in \mathbb{R}, \frac{(2n)!}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \times \frac{n!}{k!}x^k$$

$$\text{soit } \frac{(2n)!}{n!}x^n = n!x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

$$\text{En particulier pour } x = 1 \text{ (mais tout } x \neq 0 \text{ convient !)} : \frac{(2n)!}{n!} = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \text{ d'où } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}.$$

Corrigé de l'exercice 6 (a)(c) (les autres sont vraiment analogues ...)

Bien commencer par lire le point méthode fin du chapitre (poly complet sur le site, pour tous les détails)

(a) les polynômes qui apparaissent à gauche et à droite de l'encadrement sont resp. de degré 1 et 2.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ fixé.

Méthode 1 : on applique 2 fois la formule en $n = 1$ et $n = 2$.

En posant pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) = e^{-t}$, on a bien $f \in C^3$ sur $\mathbb{R}^+$, avec $f(0) = 1$, $f'(t) = -e^{-t}$, $f'(0) = -1$, $f''(t) = e^{-t}$, $f''(0) = 1$, $f^{(3)}(t) = -e^{-t}$, D'où pour $n = 1$: $e^{-x} = 1 - x + \int_0^x \frac{(x-t)^1}{1!} e^{-t} dt = 1 - x + \int_0^x (x-t)e^{-t} dt$.

On remarque que pour $0 \leq t \leq x$ (on a $x \geq 0$), $(x-t)e^{-t} \geq 0$ donc comme les bornes sont dans le bon sens, par positivité de l'intégrale, $\int_0^x (x-t)e^{-t} dt \geq 0$, d'où $e^{-x} \geq 1 - x$.

Et pour $n = 2$: $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} e^{-t} dt$.

Or pour des raisons analogues, on a $\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^{-t} dt \geq 0$, d'où $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$.

Méthode 2 : on repart de la formule de Taylor pour $n = 1$, mais on encadre plus finement l'intégrale pour avoir directement les deux côtés.

Avec le début du raisonnement précédent on a : $e^{-x} = 1 - x + \int_0^x (x-t)e^{-t} dt$.

Or $0 \leq t \leq x \Rightarrow 0 \leq e^{-x} \leq e^{-t} \leq 1$, et comme $(x-t) \geq 0$, $0 \leq (x-t)e^{-t} \leq (x-t)$. Il reste à intégrer entre 0 et $x \geq 0$: $0 \leq \int_0^x (x-t)e^{-t} dt \leq \int_0^x (x-t) dt = \left[-\frac{(x-t)^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$.

D'où en rajoutant $1 - x$ à chaque membre :

$$1 - x \leq 1 - x + \int_0^x (x-t)e^{-t} dt \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} \text{ càd } 1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} \text{ vu la formule de départ.}$$

(c) les polynômes qui apparaissent à gauche et à droite de l'encadrement sont resp. de degré 2 et 3.

Fixons $x \in \mathbb{R}^+$.

Méthode 1 : on applique 2 fois la formule en $n = 2$ et $n = 3$.

En posant pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) = \ln(1+t)$, on a bien $f \in C^4$ sur $\mathbb{R}^+$, avec $f(0) = 0$, $f'(t) = \frac{1}{1+t}$, $f'(0) = 1$, $f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$, $f''(0) = -1$, $f^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$, $f^{(3)}(0) = 2$ et $f^{(4)}(t) = \frac{-6}{(1+t)^4}$.

D'où pour $n = 2$: $\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \frac{2}{(1+t)^3} dt$.

On remarque que pour $0 \leq t \leq x$ (on a $x \geq 0$), $\frac{(x-t)^2}{2} \frac{2}{(1+t)^3} \geq 0$ donc comme les bornes sont dans le bon sens, par positivité de l'intégrale, $\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \frac{2}{(1+t)^3} dt \geq 0$, d'où $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

Et pour $n = 3$: $\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3!}x^3 - \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3} \frac{6}{(1+t)^4} dt$.

Or pour des raisons analogues, on a $\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3} \frac{6}{(1+t)^4} dt \geq 0$, d'où $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3!}x^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Méthode 2 : on repart de la formule de Taylor pour $n = 2$, mais on encadre plus finement l'intégrale pour avoir directement les deux côtés.

Avec le début du raisonnement précédent on a : $\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t)^2 \frac{1}{(1+t)^3} dt$ (après avoir simplifié les 2

de l'intérieur de l'intégrale).

Or $0 \leq t \leq x \Rightarrow 1 \leq (1+t)^3 \leq (1+x)^3 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{(1+x)^3} \leq \frac{1}{(1+t)^3} \leq 1$ et comme $(x-t)^2 \geq 0$, $0 \leq (x-t)^2 \frac{1}{(1+t)^3} \leq (x-t)^2$.

Il reste à intégrer entre 0 et $x \geq 0$: $0 \leq \int_0^x (x-t)^2 \frac{1}{(1+t)^3} dt \leq \int_0^x (x-t)^2 dt = [-\frac{(x-t)^3}{3}]_0^x = \frac{x^3}{3}$.

D'où en rajoutant $x - \frac{x^2}{2}$ à chaque membre :

$x - \frac{x^2}{2} \leq x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t)^2 \frac{1}{(1+t)^3} dt \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ càd $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ vu la formule de départ.

Corrigé de l'exercice 7

D'après la formule de Taylor pour les polynômes appliquée à P de degré n en a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

Donc pour tout $x \in [a, +\infty[$, $P(x) = \underbrace{P(a)}_{>0} + \underbrace{P'(a)}_{>0} \underbrace{(x-a)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{P''(a)}{2!}}_{>0} \underbrace{(x-a)^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{\frac{P^{(n)}(a)}{n!}}_{>0} \underbrace{(x-a)^n}_{\geq 0} \geq P(a) > 0$.

Donc P ne peut pas s'annuler sur $[a, +\infty[$, donc P ne peut pas avoir de racine sur $[a, +\infty[$.

Attention, garder la somme permettait d'avoir facilement $P(x) \geq 0$ pour $x \geq a$, mais pas l'inégalité stricte (pb en $x = a$ où presque tous les termes s'annulaient ...). Pour garder la somme, il fallait alors étudier 2 cas :

pour $x > a$, $P(x) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{P^{(k)}(a)}{k!}}_{>0} \underbrace{(x-a)^k}_{>0} > 0$ et pour $x = a$, $P(x) = P(a) > 0$.

Corrigé de l'exercice 8

Méthode "naive" : on ne considère que la première partie de la question, et on cherche à montrer que la famille $(1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

On remarque que cette famille contient $n+1$ polynômes et $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$. De plus, les polynômes sont tous non-nuls et de degrés 2 à 2 distincts, donc la famille est libre.

Bref, cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Mais comment trouver les coordonnées d'un polynôme P quelconque dans cette base ?

Autrement dit, on cherche des coefficients tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = \underbrace{\dots}_{\in \mathbb{R}} \times 1 + \underbrace{\dots}_{\in \mathbb{R}} \times (x-a) + \underbrace{\dots}_{\in \mathbb{R}} \times (x-a)^2 + \dots + \underbrace{\dots}_{\in \mathbb{R}} \times (x-a)^n.$$

Or si on applique la formule de Taylor à $P \in \mathbb{R}_n[x]$ (donc de degré $\leq n$) en a :

$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = P(a) \times 1 + P'(a) \times (x-a) + \frac{P''(a)}{2} \times (x-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \times (x-a)^n$, on obtient exactement les coefficients cherchés ! En fait, la formule de Taylor permet de montrer que la famille de départ à savoir $(1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n)$, est génératrice de $\mathbb{R}_n[x]$ (donc une base car de bon cardinal).

Corrigé de l'exercice 9

1. $\ln$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto 1+x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in [0, 1]$, $1+x \in \mathbb{R}_+^*$, donc par composition, f est de classe C^∞ sur $[0, 1]$. Il reste à déterminer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Devinons la forme : soit $x \in [0, 1]$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f^{(3)}(x) = 2(1-x)^{-3}$, $f^{(4)}(x) = -2 * 3(1+x)^{-4}$... bref

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a "pour tout $x \in [0, 1]$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ ".

Cas $n = 1$: pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{(-1)^{0}0!}{(1+x)^1} = \frac{1}{1+x} = f'(x)$.

Supposons que pour un certain n on ait : pour tout $x \in [0, 1]$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ alors $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)(1+x)^{-n-1} = (-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)}$ puisque $-n = (-1) \times n$. Conclure.

2. Soit $n \geq 1$. f est de classe C^{n+1} sur $[0, 1]$ donc on sait qu'il existe M tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$, et d'après l'inégalité de Taylor avec reste intégral entre 0 et 1 à l'ordre n , on a pour un tel M :

$$|f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k| \leq M \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or d'après 1., $f(0) = 0$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ ce qui donne :

$$|\ln(2) - 0 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}| \leq \frac{M}{(n+1)!}. \text{ Soit encore } |\ln(2) - 0 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}| \leq \frac{M}{(n+1)!}.$$

Attention, il faut encore trouver un M qui convient, car le M introduit au début dépend de $n!$ Donc on ne

peut pas passer à la limite dans la quantité $\frac{M}{(n+1)!}$.

Conseil : commencer par chercher M avant de faire tout le calcul ci-dessus pour ne pas oublier de faire cette étape ...

Or pour tout $t \in [0, 1]$, $|f^{(n+1)}(t)| = \frac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leq n!$. Donc $M = n!$ convient et l'encadrement "final" est :

$$|\ln(2) - 0 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Théorème d'encadrement (version valeurs absolues), comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2) \in \mathbb{R}$.

Donc (reconnaitre la somme partielle de la série demandée), on en déduit que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et

la somme de la série est $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

(a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ est continue sur $[0, 1]$ donc l'intégrale I_n n'est pas impropre, et existe bien.

La convergence de la suite (I_n) s'obtient par encadrement :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1, \text{ donc par produit avec } x^n \geq 0, 0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n.$$

$$\text{Par croissance de l'intégrale, avec } 0 < 1 : 0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} [x^{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Il reste à appliquer le théorème d'encadrement pour obtenir $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \in \mathbb{R}$.

Donc la suite (I_n) converge (vers 0).

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, I_n + I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+1)}{1+x} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \text{ (calcul fait juste au-dessus).}$$

(b) D'après le (a), $\frac{1}{k} = I_k + I_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$.

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (I_{k-1} + I_k) = [I_0 + I_1] - [I_1 + I_2] + [I_2 - I_3] - [I_3 + I_4] + \dots + (-1)^n [I_{n-1} + I_n] = I_0 + (-1)^n I_n \text{ après télescopage.}$$

Comme $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $(-1)^{n-1} I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ($|(-1)^{n-1} I_n| = I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$) d'où $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I_0 \in \mathbb{R}$. Donc

la série $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$.

Corrigé de la fin de l'exercice 11

3.(b) On a que $\frac{1}{(n+1)!} \times \frac{1}{x+n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc d'après le théorème d'encadrement,

$$\int_0^1 u^{x-1} e^{-u} du - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!(k+x)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ d'où } \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!(k+x)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u^{x-1} e^{-u} du. \text{ Or par convergence de la série,}$$

on sait que $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!(k+x)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(k+x)} = g(x)$, donc par unicité de la limite : $g(x) = \int_0^1 u^{x-1} e^{-u} du$.

bonus : pour $0 < x < 1$, l'intégrale $\int_0^1 u^{x-1} e^{-u} du$ est impropre en 0. Donc au moment d'utiliser la croissance de l'intégrale (puis l'inégalité triangulaire puis la linéarité), il ne suffit plus de dire que les fonctions en jeu sont continues sur $[0, 1]$. Il faut bien sûr dire qu'elles sont continues sur $]0, 1]$, mais vérifier également la convergence des intégrales. Or en 0 on a $u^{x-1} e^{-u} \sim u^{x-1} = \frac{1}{u^{1-x}}$.

Il reste à appliquer le critère d'équivalence puisque l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{u^{1-x}} dx$ est convergente ($\alpha = 1-x < 1$). (En deuxième année, il vous suffira de reconnaître que c'est la fonction Gamma ...)

Le membre de droite est continu sur $[0, 1]$ donc pas de problème de ce côté là ... ce qui garantit également la cv absolue du membre de gauche

Corrigé de l'exercice 13

Cet exercice est une "redite" de l'exercice 11, afin de bien valider la méthode. Mais attention, la technicité est un peu plus importante car les intégrales sont impropres !

1. $t \mapsto te^{-t}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Mais $te^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$ ou $te^{-t} = o(e^{-1/2t})$ rédiger alors le critère de négligeabilité.

Attention si vous utilisez la première solution de bien vous placer sur $[1, +\infty[$ (car l'intégrale de Riemann est $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$, puis à revenir à $[0, +\infty[$).

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos(tx)e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Donc pour obtenir l'existence de $G(x)$ il reste à montrer que l'intégrale converge bien.

Soit $x \in \mathbb{R}$: alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $|\cos(tx)e^{-t}| \leq e^{-t}$. Comme l'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, on déduit du critère de comparaison appliqué à des fonctions continues et positives que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-t} dt$ converge absolument et donc converge. On obtient bien que G est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $A > 0$: alors en posant $u'(t) = e^{-t}$ et $v(t) = \cos(tx)$, on a $u(t) = -e^{-t}$ et $v'(t) = -x \sin(tx)$, d'où par IPP (u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$), $\int_0^A \cos(tx)e^{-t} dt = [-e^{-t} \cos(tx)]_0^A - x \int_0^A \sin(tx)e^{-t} dt$ puis à l'aide d'une 2e IPP sur l'intégrale (poursuivre dans le même sens que la 1ere!)
 $= -e^{-A} \cos(Ax) + 1 - x \left([-e^{-t} \sin(tx)]_0^A + x \int_0^A \cos(tx)e^{-t} dt \right) = -e^{-A} \cos(Ax) + 1 + xe^{-A} \sin(Ax) - x^2 \int_0^A \cos(tx)e^{-t} dt$
 $\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 + 1 + 0 - x^2 G(x).$
(en effet, par exemple $|\cos(Ax)e^{-A}| \leq e^{-A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 \dots$)

D'où $G(x) = 1 - x^2 G(x)$ soit encore $G(x)(1 + x^2) = 1$ et finalement $G(x) = \frac{1}{1+x^2}$, puisque $1 + x^2 \neq 0$.

- 4 Soit $x \in \mathbb{R}$.

Attention, intégrale doublement impropre puisque $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ n'est continue que sur $]0, +\infty[$. Etude de $\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$: or on remarque que $\frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{xt}{t} e^{-t} = x e^{-t} \xrightarrow{x \rightarrow 0} x \in \mathbb{R}$, donc l'intégrale est faussement impropre en 0 donc converge.

Etude de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$. Or pour tout $t \geq 1$, $|\frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}| \leq \frac{1}{t} e^{-t} \leq e^{-t}$ puisque $t \geq 1$.

Comme l'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, d'après le critère de comparaison pour les fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$ converge absolument donc converge.

5. Ici, contrairement aux exercices précédents, la fonction à laquelle on doit appliquer T-L est plus "cachée", comme les points en lesquels on l'applique.

Fixons x, h et t , trois réels.

Plusieurs solutions : on peut par exemple poser $f : u \rightarrow \sin(u)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on applique T-L aux points $a = tx$ et $b = tx + th$, à l'ordre 2.

Comme pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|f''(u)| \leq 1$, on trouve $|f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)| \leq 1 \times \frac{|b-a|^2}{2!}$

d'où $|\sin(xt + xh) - \sin(xh) - th \cos(xt)| \leq \frac{(th)^2}{2}$.

Variante : on pose $f : u \mapsto \sin(tx + u)$ et on applique T-L aux points 0 et $th \dots$

6. Les étapes clés : : poser x et h puis 1. on multiplie par e^{-t} , positif (donc on peut bien le rentrer dans les valeurs absolues)

2. on intègre entre 0 et $+\infty$: bien justifier que toutes les intégrales en jeu convergent !! 3. utiliser l'inégalité triangulaire pour faire "rentrer" l'intégrale, puis la linéarité pour séparer en 3 intégrales (elles cv toutes)

4. On divise par $|h|$ (bien penser aux valeurs absolues, sinon, la quantité n'est pas positive!) et se rappeler que

$\frac{|b|}{|h|} = \left| \frac{b}{h} \right|$ pour faire "rentrer" le h dans les valeurs absolues. Attention également : $\frac{h^2}{|h|} = |h|$.

5. reconnaître tous les morceaux, mais laisser l'intégrale du membre de droite telle quelle (inutile de la calculer, elle cv donc c'est un réel).

on obtient : $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq |h| \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$

7. Attention, coquille dans l'énoncé! C'est $F' = G$ (et non $F = G$).

On applique le théorème d'encadrement quand $h \rightarrow 0$, puisque $|h| \rightarrow 0$. On en déduit que $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

donc $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} G(x) \in \mathbb{R}$. Donc F est dérivable en x , et $F'(x) = G(x)$. Vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8. On en déduit donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = c + \arctan(x)$.
Or $F(0) = 0$ et $\arctan(0) = 0$ donc $c = 0$.

Corrigé de l'exercice 14

Cet exercice est une "redite" de l'exercice 11, afin de bien valider la méthode. Tout vous paraîtra "plus" simple sauf l'inégalité de T-L, plus délicate ici, car plus de lettres

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $t \mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$ est continue sur $[0, 1]$ (segment) donc $S(x)$ existe bien. De même pour $C(x)$.
Donc S et C sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Pour l'inégalité de Taylor Lagrange :

Variante 1 : poser $f(t) = \sin(a+t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

puis appliquer l'inégalité à f à l'ordre 1, $\left[\text{entre } 0 \text{ et } y \right]$.

On cherche $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout t entre 0 et y , $|f''(t)| \leq M$.

Comme y est quelconque, il suffit de chercher M tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f''(t)| \leq M$. Or $f''(t) = -\sin(a+t)$, donc $|f''(t)| = |\sin(a+t)| \leq 1$, et $M = 1$ convient.

Il reste alors à appliquer la formule, après avoir calculé $f(0) = \sin(a)$, $f'(t) = \cos(a+t)$ donc $f'(0) = \cos(a)$.

On conclut : $|\sin(a+y) - \sin(a) - \cos(a)y| \leq 1 \times \frac{|y|^2}{2} = \frac{y^2}{2}$.

Variante 2 : poser $f(t) = \sin(t)$, pour $t \in \mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$,

puis appliquer l'inégalité à f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à l'ordre 1, entre a et $a + y$.

On cherche $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout t entre a et $a + y$, $|f''(t)| \leq M$.

Comme a , et y sont quelconque, il suffit de chercher M tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f''(t)| \leq M$. Or $f''(t) = -\sin(t)$, donc $|f''(t)| = |\sin(t)| \leq 1$, et $M = 1$ convient.

Il reste alors à appliquer la formule, après avoir calculé $f(a) = \sin(a)$, $f'(a) = \cos(a)$.

On conclut : $|f(a+y) - f(a) - f'(a)(a+y-a)| \leq M \frac{|a+y-a|^2}{2}$ càd $|\sin(a+y) - \sin(a) - \cos(a)y| \leq 1 \times \frac{|y|^2}{2} = \frac{y^2}{2}$.

3. Fixer $x \in \mathbb{R}$. Alors pour $h \in \mathbb{R}^*$ et $t \in [0, 1]$, on a $a = xt \in \mathbb{R}$, et $y = ht \in \mathbb{R}$ d'où d'après 2.

$|\sin(xt + ht) - \sin(xt) - ht \cos(xt)| \leq \frac{(ht)^2}{2}$, puis par produit avec $e^{-t^2} \geq 0$ (rappel si $\lambda \geq 0$, $\lambda|x| = |\lambda x|$)

$|\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2} - ht \cos(xt)e^{-t^2}| \leq \frac{(ht)^2}{2} e^{-t^2}$.

En divisant par $|h| > 0$ (vérifier que vous avez pensé aux valeurs absolues!! sinon, pb de signe, et il faudrait distinguer deux cas ...), en se rappelant que $\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$:

$\left| \frac{\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2} - ht \cos(xt)e^{-t^2}}{h} \right| \leq \frac{h^2 t^2}{2} e^{-t^2} \frac{1}{|h|}$ soit encore

$\left| \frac{\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t \cos(xt)e^{-t^2} \right| \leq \frac{|h|t^2}{2} e^{-t^2}$, puisque $\frac{h^2}{|h|} = \frac{|h|^2}{|h|} = |h|$.

4. Il reste à utiliser la croissance de l'intégrale, avec $0 \leq 1$,

$\int_0^1 \left| \frac{\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t \cos(xt)e^{-t^2} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{|h|t^2}{2} e^{-t^2} dt$

ainsi que l'inégalité triangulaire, pour obtenir :

$\left| \int_0^1 \left(\frac{\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t \cos(xt)e^{-t^2} \right) dt \right| \leq \int_0^1 \frac{|h|t^2}{2} e^{-t^2} dt$. D'où par linéarité :

$\left| \frac{1}{h} \left(\int_0^1 \sin((x+h)t)e^{-t^2} dt - \int_0^1 \sin(xt)e^{-t^2} dt \right) - \int_0^1 t \cos(xt)e^{-t^2} dt \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^1 t^2 e^{-t^2} dt$.

Soit encore $\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^1 t^2 e^{-t^2} dt$

5. Il reste à faire tendre h vers 0 : d'après le théorème d'encadrement, comme $\int_0^1 t^2 e^{-t^2} \in \mathbb{R}$, (constante indépendante de h), on obtient $\frac{|h|}{2} \int_0^1 t^2 e^{-t^2} dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ d'où $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ soit encore $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} C(x) \in \mathbb{R}$.

On en déduit que S est dérivable en x , et $S'(x) = C(x)$.

Vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'où le résultat.

Corrigé des exercices 15, 16, 17, 19 et 25 : cf PJ manuscrite

Corrigé de l'exercice 18

1. $\ln(1+x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $w_{n+1} - w_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

On peut utiliser le DL du $\ln$ rappelé au 1. en $x = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ mais il faut encore transformer le $\frac{1}{n+1}$ car $n \rightarrow +\infty$.

Or $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(1+1/n)} = \frac{1}{n} \frac{1}{1+1/n}$ d'où $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$.

3. Attention au signe ! Pour le critère d'équivalence, il faut que les 2 termes généraux soient positifs !

Méthode 1 : par convergence absolue $|w_{n+1} - w_n| \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2}$. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$) donc,

par linéarité, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2}$ converge. Par théorème d'équivalence des séries à terme positifs,

la série $\sum_{n \geq 1} |w_{n+1} - w_n|$ converge. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} (w_{n+1} - w_n)$ converge absolument donc converge.

Méthode 2 : au vu de l'équivalent trouvé, à partir d'un certain rang, les deux membres sont toujours négatifs.

Or par linéarité, la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (w_{n+1} - w_n)$ est équivalente à la convergence de la série

$-\sum_{n \geq 0} (w_{n+1} - w_n)$: dans cette dernière série, on a bien des termes positifs à partir d'un certain rang avec

$-(w_{n+1} - w_n) \sim \frac{1}{2n^2}$. Faire alors le critère sur cette série ...

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) = w_n - w_1$, donc $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) + w_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) + w_1 \in \mathbb{R}$

puisque la série converge. Donc la suite (w_n) converge.

Corrigé de l'exercice 20

Attention, la puissance bouge!! Donc forme exponentielle obligatoire (rien que pour identifier une éventuelle FI!) : $(1 + \frac{a_n}{n})^n e^{-a_n} = e^{n \ln(1 + \frac{a_n}{n}) - a_n} = e^{n(\ln(1 + \frac{a_n}{n}) - \frac{a_n}{n})}$.

Etudions plus précisément $n(\ln(1 + \frac{a_n}{n}) - \frac{a_n}{n})$: on sait que $\frac{a_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{a_n}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

En posant $u = \frac{a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on voit apparaître la forme $\ln(1 + u) - u$ d'où DL!

$$\ln(1 + u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2) \text{ d'où } \ln(1 + u) - u = -\frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$$

$$\text{On obtient alors : } \ln(1 + \frac{a_n}{n}) - \frac{a_n}{n} = -\frac{1}{2}(\frac{a_n}{n})^2 + o((\frac{a_n}{n})^2)$$

D'où $n(\ln(1 + \frac{a_n}{n}) - \frac{a_n}{n}) = -\frac{1}{2}\frac{a_n^2}{n} + o(\frac{a_n^2}{n}) = -\frac{1}{2}(\frac{a_n}{\sqrt{n}})^2 + o((\frac{a_n}{\sqrt{n}})^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. car par hyp $\frac{a_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'où par composition avec l'exponentielle continue en 0, $e^{n \ln(1 + \frac{a_n}{n}) - a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$.

Corrigé de l'exercice 20

f continue en 0 donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ et $f(-x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ d'où FI $\frac{0}{0}$.

Piste : faire un DL au numérateur pour obtenir un équivalent et simplifier la fraction. Comme f n'est pas une fonction usuelle, il faut revenir à la formule de Taylor Young pour obtenir un DL de $f(x)$ et de $f(-x)$.

Comme f est C^2 au voisinage de 0, d'après la formule de Taylor Young, on obtient :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2).$$

$$\text{D'où en } -x : f(-x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(-x) + \frac{f''(0)}{2!}(-x)^2 + o((-x)^2) = f(0) - \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2).$$

Par somme, obtient :

$$f(x) + f(-x) = 2f(0) + f''(0)x^2 + o(x^2) \text{ soit encore } f(x) + f(-x) - 2f(0) = f''(0)x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} f''(0)x^2.$$

$$\text{Par quotient : } \frac{f(x) + f(-x) - 2f(0)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{f''(0)x^2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f''(0).$$

Corrigé de l'exercice 22

1. Pour $x = 0$, $f(x) = 0$ et pour $x \neq 0$, $f(x)$ existe ssi $e^x - e^{-x} \neq 0$.

Or $e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Sur $] -\infty, 0[$ (resp. $]0, +\infty[$), f est continue comme quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Continuité en 0 : FI $\frac{0}{0}$. Au dénominateur une somme : passer par un DL pour trouver un équivalent.

$$\text{Or } e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \text{ d'où } e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}(-x)^2 + o(x^2) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\text{et par somme } e^x - e^{-x} = 2x + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x.$$

$$\text{Par quotient, } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x^2}{2x} = x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0). \text{ Ccl}$$

3. Même blabla : f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ (resp. $]0, +\infty[$).

Dérivabilité en 0 : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x}{2x} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \in \mathbb{R}$. D'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Corrigé de l'exercice 23

Pour $x \in] -1, +\infty[$, $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x(x+2)}$.

1. On connaît un DL de $\ln(1+x)$, de $\frac{\ln(1+x)}{x}$ (attention par contre, on va perdre un ordre en divisant par x)... mais comment faire avec $\frac{1}{x+2}$?

première idée possible : poser $X = x + 1$. Ainsi, $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{1+X}$... mais ne marche pas car $X \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et non 0 ...

Bonne piste : mettre 2 en facteur. Alors $\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2(1+x/2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+X}$ avec $X = \frac{x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

$$\text{Or } \frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2) \text{ d'où } \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x/2} = \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{2} + (\frac{x}{2})^2 + o(x^2)) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

$$\text{Par ailleurs } \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \text{ d'où } \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$$

et par produit $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{1}{x+2} = (1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2))(\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o(x^2))$. Il reste à développer, simplifier et regrouper tous les $o()$. On obtient $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{5}{12}x^2 + o(x^2)$.

2. On remarque à l'aide du DL précédent, que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{1}{2} = f(0)$ donc f est continue en 0.
 Donc comme f est continue en 0 et admet un DL d'ordre 1 (même d'ordre 2) en 0, on sait d'après le cours (dernier th du chapitre) que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$ (coefficient devant x dans le DL).
3. On sait même que l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$ (partie principale du DL d'ordre 1 de f); et d'après le DL d'ordre 2 $f(x) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x) = \frac{5}{12}x^2 + o(x^2)$. Comme $\frac{5}{12} \geq 0$, localement près de 0, $f(x) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x) \geq 0$, donc la courbe est au-dessus de la tangente en 0 au voisinage de 0.

Corrigé de l'exercice 26

1. (a) Pour tout $x \neq 0 : e^x - 1 \neq 0$, donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues.

En 0 : $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et donc pour $x \neq 0 : f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1 = f(0)$ et f est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

(b) De même, f est C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$

(c) FI 0/0; on a $(e^x - 1)^2 \sim x^2$ et pour le numérateur, comme il y a une somme, on passe par un DL.

$(1-x)e^x - 1 = (1-x)(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1 = 1 - x + x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{1}{2}x^2$.

D'où $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-1/2x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

(d) Théorème de prolongement : Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} -\frac{1}{2}$

alors f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$		+	-
$u(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

2. (a) u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = (1-x)e^x - e^x = -xe^x$. Donc

En particulier, $u \leq 0$ sur $\mathbb{R}$ et $u < 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

(b) Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{u(x)}{(e^x - 1)^2} < 0$ et pour $x = 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2} < 0$.

En $-\infty : f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} +\infty$ car $e^x - 1 \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} -1$ En $+\infty : f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{e^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ d'après les croissances comparées.

(c) En $-\infty : f(x) - (-x) = \frac{x}{e^x - 1} + x = \frac{xe^x}{e^x - 1}$. Or $xe^x \underset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} 0$ (croissances comparées) d'où $f(x) + x \rightarrow 0$ et la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

(d) Ne pas oublier de tracer sur le graphique l'asymptote en $-\infty$, l'asymptote horizontale ($y = 0$) en $+\infty$ et la tangente de pente $-\frac{1}{2}$ au point d'abscisse 0.

3. (a) $f(0) = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas solution. Puis pour $x \neq 0$, $f(x) = x \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$. Unique solution.

(b) poser pour $x \geq 0$, $h(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$ et faire son TV pour obtenir son signe.

(c) Soit $x \geq 0$. On sait déjà $f'(x) < 0$. De plus pour $x > 0$, $f'(x) + \frac{1}{2} = \dots = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \geq 0$ par ce qui précède.

Et pour $x = 0$, on a bien $f'(x) \geq -\frac{1}{2}$. Ccl.

(d) Appliquer l'inégalité des accroissements finis à f continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, et aux points $u_n, \alpha \in \mathbb{R}^+$.

Pour la deuxième partie de la question, faire une récurrence :

$n=0$ $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = 1 - \alpha \leq 1$ car $0 \leq \alpha = \ln(2) \leq \ln(e) = 1$.

hérédité : si on suppose que pour un certain n $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$, alors par ce qui précède, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$ il reste à ccl

(e) Théorème d'encadrement, comme $|\frac{1}{2}| < 1$, $u_n - \alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ donc (α constante), $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \alpha$. La suite u converge vers α .

(f) u_n fournira une bonne valeur approchée α dès que n sera suffisamment grand. Pour avoir la précision à 10^{-3} près, il suffit de regarder les entiers n tels que $(\frac{1}{2})^n \leq 10^{-3}$.

`u=1`

`n=0`

`while (1/2)**n > 0.001:`

`u=f(u)`

`n=n+1`

`print(u)`

où f est la fonction suivante :

`def f(x):`

`if x==0:`

`return 1`

`else :`

`return x/(np.exp(x)-1)`

4. (a) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet une primitive F qui est C^1 sur $\mathbb{R}$. On a alors $G(x) = F(2x) - F(x)$ et donc G est C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions C^1 .

De plus, $G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2\frac{2x}{e^{2x}-1} - \frac{x}{e^x-1}$ si $2x \neq 0$ et $x \neq 0$ (ce qui revient à $x \neq 0$) $= \frac{4x-x(e^x+1)}{e^{2x}-1} = \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}$ car $e^{2x}-1 = (e^x)^2-1 = (e^x-1)(e^x+1)$.

Par ailleurs, pour $x=0 \Leftrightarrow 2x=0$, $G'(0) = 2f(0) - f(0) = 1$

(b) Soit $x \geq 0$. Alors $x \leq 2x$ et pour tout $x \leq t \leq 2x : 0 \leq f(2x) \leq f(t) \leq f(x)$ car f décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc par croissance de l'intégrale, avec $x \leq 2x$, $0 \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt = f(x)(2x-x) = xf(x)$

Et comme $xf(x) = \frac{x^2}{e^x-1} = \frac{x^2}{e^x} \frac{1}{1-e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, par encadrement : $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ Pour $x \leq 0$ on

a $2x \leq x \leq 0$ et pour tout $2x \leq t \leq x : f(t) \geq f(x)$ car f décroissante sur $\mathbb{R}$. D'où $\int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt = f(x)(2x-x)$ car les bornes sont en ordre décroissant.

Conclusion : $\forall x \in]-\infty; 0]$, $G(x) \leq xf(x)$.

Et comme $xf(x) = \frac{x^2}{e^x-1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$, par comparaison, $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$

(c) On rassemble tout :

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\ln(3)$	$-$	$+\infty$
$e^{2x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
$G'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
$G(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$G(\ln 3)$	$\searrow$	0