Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Continuité (et bijectivité)

Corrigé exercice 1

Etude de f_2 :

pour $-1 \leq x \leq x$, et $x \neq 0$, $1+x \geq 0$ et $1-x \geq 0$ et $x \neq 0$ donc $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ est bien défini. Comme de plus f est définie en 0, on en déduit que f est définie sur $[-1,1]$.
Sur l'intervalle $[-1,0[$ (resp. sur l'intervalle $]0,1]$), f est continue comme somme et quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
En 0 : FI 0/0. On passe par la quantité conjuguée :
pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{2} = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.
Conclusion : f_2 est continue sur $[-1,1]$.

Etude de f_4 :

pour $x \geq 0$ et $x \neq 1$, $\sqrt{x}$ existe et $1-\sqrt{x} \neq 0$, donc f y est bien définie. Comme de plus, f est définie en 1, on obtient que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.
Sur l'intervalle $[0,1[$, (resp. sur $]1,+\infty[$), f est continue comme somme et quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Il reste à étudier le point de raccord $x=1$: Fi 0/0 en 1, donc on pose $h = x-1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. Alors $\frac{|x-1|}{1-\sqrt{x}} = \frac{|h|}{1-\sqrt{1+h}}$. Donc si $h>0$, $\frac{|h|}{1-\sqrt{1+h}} = \frac{h}{1-\sqrt{1+h}} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{1/2} = -2$.
De même, si $h<0$, $\frac{|h|}{1-\sqrt{1+h}} = \frac{-h}{1-\sqrt{1+h}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}} \underset{h\to 0^-}{\longrightarrow} 2 \neq -2$. Donc la limite en $h=0$ n'existe pas, donc la limite en $x=1$ n'existe pas, et la fonction f_4 n'est pas continue en 1.
Comme $f_4(1)=2$, on peut toutefois préciser qu'elle est continue à gauche en 1.

Etude de f_5 :

$x \mapsto \frac{x\ln x}{x-1}$ est définie pour $x>0$ et $x \neq 1$, donc comme f est de plus définie en 0 et 1, on obtient que $\mathcal{D}_f = [0,+\infty[$.
Sur $]0,1[$ (resp. $]1,+\infty[$), la fonction est continue comme produit et quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Il reste la continuité en 1 et en 0 (à droite).
En 0 : croissances comparées $x\ln x \to 0$, donc pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{x\ln x}{x-1} \to 0 = f(0)$. f est continue en 0.
En 1 : Fi 0/0. on pose $h = x-1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. Alors $\frac{x\ln x}{x-1} = (h+1)\frac{\ln(1+h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1 \times 1 = f(1)$ d'après les limites usuelles. Donc f est continue en 1.
Conclusion : f est continue sur $[0,+\infty[$.

Corrigé exercice 2

(b) $f(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x})$ f est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ et comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty,0[$, resp sur $]0,+\infty[$, par composée et produit avec la fonction sinus continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
Etude du prolongement par continuité en $0 \notin \mathcal{D}_f$: Attention, ici, le problème ne vient pas d'une FI mais d'une absence de limite (de $\sin(\frac{1}{x})$).
Méthode : passer par les valeurs absolues et utiliser le théorème d'encadrement (cf conséquence 2 th d'encadrement, chapitre Limites).
Or pour tout $x \neq 0$, $|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$, d'où $|\sin(x)\sin(\frac{1}{x})| \leq |\sin(x)| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. D'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$. On en déduit que la fonction f se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 0.

(c)$f(x) = x^x = e^{x\ln x}$ donc f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur ce même intervalle (phrase blabla).
Etude du prolongement en 0 : or d'après les croissances comparées, $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc par continuité de l'exponentielle en 0, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^0 = 1 \in \mathbb{R}$. Donc f se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 1.

Corrigé exercice 3

Le but est de vous faire réaliser les deux types de fonctions auxquelles vous pourrez être confrontées.
La première fonction est définie par une accolade : autrement dit, elle a déjà été prolongée au point à problème $x=1$, et même au-delà. La question est donc : est-elle continue en 1 ?
La deuxième fonction, n'est pas définie en 0 : la question est donc : est-ce-qu'elle se prolonge par continuité en 0 ? (si oui, on pourra alors la prolonger en l'écrivant à l'aide d'une accolade...)

La première fonction a déjà été étudiée chapitre limites : pas de FI à gauche en 1. En effet, pour $x<1$, $x-1 \to 0^-$, donc $\frac{1}{x-1} \to -\infty$, et $e^{\frac{1}{x-1}} \to 0$.
D'où $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(1)$, et f est continue à gauche en 1.
De plus, pour $x>1$, $f(x) = 0 \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 1 = f(1)$ donc f continue à droite en 1.

Bref, f est continue en 1.

Pour la 2e : pour $x>0$, $f(x)=1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et pour $x<0$, $f(x)=-1 \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -1$. Comme $1\neq -1$, la fonction n'a pas de limite en 0, donc ne se prolonge pas par continuité en 0.

Corrigé exercice 6

Remarquer que l'on demande l'existence ... mais pas l'unicité : il n'y aura donc pas d'argument de stricte monotonie ni de bijectivité, mais juste l'application du TVI (le vrai ! version prépa ! , et non le faux du secondaire).

1. Posons $g(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$. Alors g est définie sur $[0,\frac{1}{2}]$. En effet, comme f est définie sur $[0,1]$, $g(x)$ existe si $x+\frac{1}{2}\in[0,1]$ et si $x\in[0,1]$ càd si $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ et si $x\in[0,1]$ càd si $x\in[0,\frac{1}{2}]$. Comme de plus f est continue sur $[0,1]$, par somme (et composée), g est continue sur $[0,\frac{1}{2}]$.
   Enfin, $g(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)$ et $g(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2})=f(0)-f(\frac{1}{2})=-g(0)$.
   Donc $g(0)g(1)\leq 0$, et d'après le TVI (son corollaire), on sait qu'il existe $x\in[0,\frac{1}{2}]$ tel que $g(x)=0$.
   C'est-à-dire tel que $f(x+\frac{1}{2})=f(x)$.
2. On montre comme dans la question précédente, que g est définie et continue sur $[0,1-\frac{1}{n}]$. Il reste à montrer que g prend des valeurs strictement positives et strictement négatives pour conclure avec le corollaire du TVI.
   Or, si on suit l'indication : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}[f(\frac{k}{n}+\frac{1}{n})-f(\frac{k}{n})] = \sum\limits_{k=0}^{n-1}[f(\frac{k+1}{n})-f(\frac{k}{n})] = f(\frac{n}{n})-f(0)$ (somme télescopique) $= f(1)-f(0)=0$. Donc $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n})=0$.
   Or pour qu'une somme de réels soit nulle, soit tous les termes sont nuls (mais alors on a bien l'existence d'un x qui annule g), soit il existe au moins un terme strictement négatif et un terme strictement positif. (en effet, dès qu'il existe au moins un terme non-nul, si tous les autres termes sont nuls ou de même signe, alors la somme aura ce même signe strict et donc ne peut etre nulle !).
   Dans ce dernier cas, en appliquant le corollaire du TVI, on obtient l'existence du x cherché.
   Dans tous les cas, on a prouvé l'existence du x ....

Corrigé exercice 7

Idée : théorème des valeurs extrêmes appliqué à f . Sur tout segment du type $[0,A]$ (où $A>0$ fixé), comme f est une fonction continue, elle est bornée. Il reste à la borner "au voisinage de $+\infty$", ce qui est possible car elle admet une limite finie.

Rédaction : Notons $\ell\in\mathbb{R}$, la limite de f en $+\infty$. D'après la définition de la limite, il existe $A\in\mathbb{R}$, tel que pour tout $x\geq A$, $\ell-1\leq f(x)\leq \ell+1$. En particulier, f est bornée sur $[A,+\infty[$. Puis sur $[0,A]$, d'après le théorème des extrêmas, comme f est continue, f est bornée.
Finalement, f est bornée sur $[0,+\infty[$.

Corrigé exercice 8. Question 2.

Poser la fonction $f(x)=\ln(x)-e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Le but est de montrer qu'il existe une unique solution à l'équation $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
TV de f : pour $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{x}+e^{-x}>0$. $f(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\infty$ et $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ (pas de F.I.).
f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc (théorème de la bijection) f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $f(\mathbb{R}_+^*)=\mathbb{R}$.
Donc (définition de la bijection), pour tout $y\in\mathbb{R}$, il existe un unique $x>0$ tel que $f(x)=y$.
En particulier, pour $y=0\in\mathbb{R}$, il existe un unique $x\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x)=0$ càd $\ln x=\frac{1}{e^x}$.

Il reste à vérifier que $x\in[1,3]$. Or $f(1)=-e^{-1}\leq 0$ et $f(3)=\ln(3)-\frac{1}{e^3}\geq 0$ car $\ln(3)\geq\ln(e)=1$ et $\frac{1}{e^3}<1$.
Donc $f(1)\leq f(x)\leq f(3)$, et par stricte croissance de f (donc de f^{-1}), $1\leq x\leq 3$.

Corrigé exercice 9

Etude de f : signe de $1+x+x^2$: $\Delta=-3<0$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1+x+x^2>0$, et donc f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur I. Pour le calcul de f', penser à écrire f sous la forme $f(x)=(1+x+x^2)^{-1/2}$ alors $f'(x)=\frac{-1}{2}(2x+1)(1+x+x^2)^{-3/2}<0$ pour $x>-1/2$ puisque $2x+1>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$. Donc f est continue et strictement décroissante sur I, et (théorème de la bijection) f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Or $f(-\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ d'où $f(I)=]0,\frac{2}{\sqrt{3}}]$.
Donc (toujours le théorème de la bijection), f^{-1} est strictement décroissante de $]0,\frac{2}{\sqrt{3}}]$ dans $[-\frac{1}{2},+\infty[$. (faire le TV de f^{-1} : attention de bien mettre les limites dans l'ordre ! $\lim\limits_{x\to 0}f^{-1}(x)=+\infty$ et $f(\frac{2}{\sqrt{3}})=\frac{1}{2}$).

Il reste à déterminer la réciproque : Soit $y\in]0,\frac{2}{\sqrt{3}}]$.
Trouvons le $x\in[\frac{-1}{2},+\infty[$ tel que $f(x)=y$ (on sait déjà qu'il en existe un unique, par définition de la bijection).

Or comme $y \neq 0$, $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \sqrt{1+x+x^2} \Leftrightarrow$ (tout est positif) $\frac{1}{y^2} = 1 + x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + x + (1 - \frac{1}{y^2}) = 0$.
$\Delta = 1 - 4(1 - \frac{1}{y^2}) = -3 + \frac{4}{y^2}$. On vérifie alors que pour $y \in]0, \frac{2}{\sqrt{3}}]$, $\Delta > 0$.
En effet, $0 < y < \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow 0 < y^2 < \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{1}{y^2} \Rightarrow 3 < \frac{4}{y^2} \Rightarrow 0 < -3 + \frac{4}{y^2} = \Delta$.
Il y a donc deux racines : $x = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$. La seule solution qui est dans l'intervalle voulu est $x = \frac{-1+\sqrt{\Delta}}{2}$ (en effet, l'autre solution est plus petite, donc n'est pas dans le bon intervalle, sinon il y en aurait deux ! ou vérifier par encadrement ...)
Finalement, f^{-1} est définie sur $]0, \frac{2}{\sqrt{3}}]$ par $y \mapsto \frac{-1+\sqrt{-3+4/y^2}}{2}$

Etude de g : g est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \geq 1$, $g'(x) = ... = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$. Donc pour $x > 1$, $1 - x < 0$ et $g'(x) < 0$.
(penser à bien exclure le 1, pour avoir g' strictement négative, mais cela donne quand même la stricte monotonie sur $[1, +\infty[$ tout entier, cf chapitre dérivabilité). g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, $g(1) = \frac{5}{2}$ et en $+\infty$, $g(x) \sim \frac{2x^2}{x^2} = 2 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 2$. Donc (théorème de la bijection), g, continue et strictement décroissante sur I réalise une bijection de I sur $]2, \frac{5}{2}]$ (penser à échanger l'ordre des bornes de l'ensemble d'arrivée, et à ouvrir du bon côté).
De plus, g^{-1} est continue et strictement décroissante sur $]2, \frac{5}{2}]$ et à valeurs dans $[1, +\infty[$.

Il reste à déterminer la réciproque : Soit $y \in]2, \frac{5}{2}]$. Trouvons le $x \in [1, +\infty[$ tel que $g(x) = y$ (on sait déjà qu'il en existe un unique, par définition de la bijection).
Or $g(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x^2+x+2}{x^2+1} = y \Leftrightarrow 2x^2 + x + 2 = y(x^2+1) \Leftrightarrow (y-2)x^2 - x + (y-2) = 0$. Alors $\Delta = 1 - 4(y-2)^2$. Or $2 < y \leq \frac{5}{2}$ donc $0 < y - 2 \leq \frac{1}{2}$ et $0 < (y-2)^2 \leq \frac{1}{4}$. D'où $0 < 4(y-2)^2 \leq 1$ et $\Delta \geq 0$. Il y a deux solutions au trinôme $\frac{1 \pm \sqrt{1-4(y-2)^2}}{2(y-2)}$. On garde l'unique solution dans $[1, +\infty[$ à savoir $x = \frac{1+\sqrt{1-4(y-2)^2}}{2(y-2)}$.
(en effet, l'autre solution est plus petite, donc n'est pas dans le bon intervalle, sinon il y en aurait deux ! ou le vérifier par encadrement ...)
Finalement, g^{-1} est définie sur $]2, \frac{5}{2}]$ par $y \mapsto \frac{1+\sqrt{1-4(y-2)^2}}{2(y-2)}$

Corrigé fin exercice 11

3. Par définition de la suite, $f_n(u_n) = 0$ donc $(u_n)^n - nu_n + 1 = 0$.
   D'où $nu_n = (u_n)^n + 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ puisque $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
   (en effet, $(u_n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(u_n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $\frac{1}{n}\ln(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, sans FI.)
1. Question plus technique : bien enchaîner les étapes !
   Pour $x \in [0, 1]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - (n+1)x + 1 - (x^n - nx + 1) = x^{n+1} - x^n - x = x^n(x-1) - x$.
   Comme $x \in [0, 1]$, $(x - 1) \leq 0$, et $-x \leq 0$, donc par somme $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$.

   On en déduit donc : pour tout $x \in [0, 1]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.
   En $x = x_{n+1}$, ce résultat donne : $f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1})$.
   Or par définition de la suite, $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, puisque justement x_{n+1} est l'unique solution de l'équation $f_{n+1}(x) = 0$!

   D'où $0 \leq f_n(x_{n+1})$.

   Réaliser alors qu'avec cette information, vous pouvez placer x_{n+1} dans le TV de f_n : en effet, f_n est décroissante et s'annule justement en x_n. Donc f_n est positive "avant" x_n : d'où $x_{n+1} \leq x_n$.
   Rédaction : $f_n(x_{n+1}) \geq 0 = f_n(x_n)$ d'où $f_n(x_{n+1}) \geq f_n(x_n)$ et par stricte décroissance de f_n (ou de f_n^{-1}), on en déduit $x_{n+1} \leq x_n$.
   Conclure : la suite (x_n) est décroissante.

Corrigé exercice 12

Soit $n \geq 3$.

1. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$. Donc f_n admet un minimum en $x = n$ de valeur $f_n(n) = n - n\ln(n) = n(1 - \ln(n)) < 0$ car $n \geq 3 > e \Rightarrow \ln(n) > \ln(e) = 1$.
   Par ailleurs, $f_n(x) = x(1 - n\frac{\ln x}{x}) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
2. Rédaction 1 : vous justifiez plus que l'énoncé ne le demande, et vous montrez qu'il existe exactement deux solutions (ni plus ni moins). Dans ce cas, l'argument de bijectivité est nécessaire.
   Théorème de la bijection sur $]0, n[$: f y est continue et strictement décroissante, donc réalise une bijection de $]0, n[$ sur $]n(1 - \ln(n)), +\infty[$. Donc (définition de la bijection), comme $0 \in]n(1 - \ln(n)), +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, n[$. Elle est notée u_n et on a bien $0 < u_n < n$.
   En n : $f_n(n) \neq 0$.
   Sur $]n, +\infty[$: théorème de la bijection puis définition de la bijection. Unique solution $v_n \in]n, +\infty[$.
   Donc sur $\mathbb{R}_+^* =]0, n[\cup \{n\} \cup]n, +\infty[$, exactement deux solutions u_n et v_n telles que $0 < u_n < n < v_n$.
   Rédaction 2 : vous justifiez seulement l'existence de u_n et v_n. Dans ce cas, le théorème des valeurs intermédiaires

suffit : f_n est continue sur $]0,n[$ donc $\forall y \in]\lim_{x\to 0} f_n(x), \lim_{x\to n} f_n(x)[=]n(1-\ln(n)),+\infty[$, $\exists x \in]0,n[$ tel que $f_n(x)=y$. En particulier avec $y=0 \in]n(1-\ln(n)),+\infty[$, on obtient bien l'existence de $u_n \in]0,n[$. De même pour v_n, en appliquant le TVI à f_n sur $]n+\infty[$.

3. Par définition de u_n, $f_n(u_n)=0$. De plus, $f_n(1)=1>0$ et $f_n(e)=e-n<0$ puisque $n\geq 3$.
   Donc on a $f_n(e)<f_n(u_n)<f_n(1)$ et comme f_n est strictement décroissante sur $]1,e[$ (donc sa réciproque aussi), on obtient $e>u_n>1$.
4. ** Par définition de la suite (u_n), on a $f_{n+1}(u_{n+1})=0$. C'est-à-dire $u_{n+1}-(n+1)\ln(u_{n+1})=0$. Ce que l'on peut réécrire : $u_{n+1}-n\ln(u_{n+1})-\ln(u_{n+1})=0$ et finalement, $u_{n+1}-n\ln(u_{n+1})=\ln(u_{n+1})$ soit $f_n(u_{n+1})=\ln(u_{n+1}))$.
   Ou partir de $f_n(u_{n+1})-\ln(u_{n+1})$:
   $f_n(u_{n+1})-\ln(u_{n+1})=u_{n+1}-n\ln(u_{n+1})-\ln(u_{n+1})=u_{n+1}-(n+1)\ln(u_{n+1})=f_{n+1}(u_{n+1})=0.$
5. Comme d'après 3. $u_{n+1}>1$, $\ln(u_{n+1})>0$ donc $f_n(u_{n+1})>0$.
   On en déduit que $f_n(u_{n+1})>f_n(u_n)$ (puisque $f_n(u_n)=0$) et comme f_n est strictement décroissante sur $]1,e[$ on aboutit à $u_{n+1}<u_n$. La suite est strictement décroissante.
   Comme elle est de plus minorée par 1, elle converge.
6. On sait : $f_n(u_n)=0$ donc $u_n-n\ln(u_n)=0$ et $\ln(u_n)=\frac{u_n}{n}$. Avec 3, on obtient $0<\frac{1}{n}<\ln(u_n)<\frac{e}{n}$.
   Théorème d'encadrement, $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.