Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Convexité et extrema

Corrigé de l'exercice 1

1. (a) $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(x_0) = 0$.
   (b) On applique deux fois le théorème de Rolle à φ sur $[a, x_0]$ puis sur $[x_0, b]$, puisque φ est bien continue et dérivable sur $[a, x_0]$, et $[x_0, b]$ (en effet φ est la somme de f et d'un polynôme).
   Donc il existe $c_1 \in]a, x_0[$, et $c_2 \in]x_0, b[$ tels que $\varphi'(c_1) = 0 = \varphi'(c_2)$.
   En appliquant maintenant le théorème de Rolle à φ' sur $[c_1, c_2]$ (qui est bien dérivable car φ C^2 par hypothèse), on obtient l'existence de $c \in]c_1, c_2[\subset]a, b[$ tel que $\varphi''(c) = 0$
   (c) Or pour tout $t \in [a, b]$, $\varphi'(t) = f'(t) - A(t-b) - A(t-a)$, et $\varphi''(t) = f''(t) - 2A$.
   Finalement, $\varphi''(c) = 0 \Leftrightarrow f''(c) = 2A \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} f''(c)$.
   La conclusion du (b) donne bien le résultat voulu.
2. Comme f'' est continue sur $[a, b]$ (puisque f C^2), d'après le théorème des valeurs extrêmes, il existe un réel M tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|f''(x)| \leq M$. En particulier $|f''(c)| \leq M$ et on déduit du 1.(c) :
   $|f(x_0)| \leq \frac{|x_0-a||x_0-b|}{2} |f''(c)| \leq M \frac{(x_0-a)(b-x_0)}{2}$ (vu $x_0 \in [a, b]$).
   Vrai pour tout $x_0 \in]a, b[$.
   Il reste à vérifier le résultat en a et en b (immédiat puisque $f(a) = 0 = f(b)$), pour l'obtenir en tout $x \in [a, b]$.

Corrigé de l'exercice 2

Bien poser toutes les lettres de la définition (car il y a 3 "pour tout" ce qui donne 3 "soit"). Ensuite, pour montrer l'inégalité, le plus simple est de faire la différence pour trouver le signe ....

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et soit $\lambda \in [0, 1]$.
Alors $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 = \lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2$.
Par ailleurs, $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$.
On fait alors la différence (on pourra remarquer au cours du calcul que $\lambda - \lambda^2 = \lambda(1-\lambda)$) :
$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - \lambda^2 x^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy - (1-\lambda)^2 y^2$
$= x^2\lambda(1-\lambda) + y^2\lambda(1-\lambda) - 2x\lambda(1-\lambda) = \lambda(1-\lambda)\big(x^2 + y^2 - 2xy\big) = \lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \geq 0$ puisque $\lambda \in [0, 1]$, donc $\lambda(1-\lambda) \geq 0$.
Il reste à conclure.

Corrigé de l'exercice 3

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et soit $\lambda \in [0, 1]$.
Alors $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.
On applique g croissante sur $\mathbb{R}$: $g(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$.
Or g est convexe donc en utilisant la définition de convexité pour g en $f(x)$ et $f(y)$:
donc $g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \leq \lambda g(f(x)) + (1-\lambda)g(f(y))$.
Ce qui donne en combinant les 2 :
$gof(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq gof(x) + (1-\lambda)gof(y)$.

Corrigé de l'exercice 4

La première question est identique à l'exo3 (partir de la déf de la convexité de $ln(f)$, et composer par l'exp croissante).
Quant à la deuxième question, pour les fonctions de classe C^2, g convexe ssi $g'' \geq 0$. L'utiliser pour $g = \ln(f)$ et bien dériver deux fois sans se faire avoir !!

Corrigé de l'exercice 6

1. $f : x \mapsto x^p$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$ (p est un entier naturel), et comme $p \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} \geq 0$.
   Donc f est convexe sur $\mathbb{R}^+$.
2. On en déduit que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$.
   D'où $(\frac{a+b)}{2})^p \leq \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p$.
   Soit encore $(a+b)^p \leq 2^p(\frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p)$ et enfin : $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

Corrigé de l'exercice 8

Quelques résultats :

pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$, et $f''(x) = \dfrac{(\ln x)^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x}{(x(\ln x)^2)^2} = \dfrac{\ln x(\ln x + 2)}{(x(\ln x)^2)^2}$.

Corrigé de l'exercice 9

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions usuelles dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = 2\frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$.
   Donc f n'admet aucun point critique.
   Or $\mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, donc les extrema locaux comme globaux sont à chercher parmi les points critiques.
   On peut donc en déduire que f n'aura aucun extremum local ni global.

2. D'après 1., on sait déjà f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ (pas de FI car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$), et en $+\infty$, comme $e^x \to +\infty$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} = \frac{1-e^x}{1+e^x} = -\frac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$. Donc f est impaire sur $\mathbb{R}$.

4. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (même phrase blabla que pour la dérivabilité) et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f''(x) = 2\frac{e^x(e^x+1)^2 - e^x 2e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^4} = 2\frac{e^x(e^x+1)-2e^{2x}}{(e^x+1)^3} = 2\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$ donc f'' est du signe de $1-e^x$.
Or $1 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^x \Leftrightarrow 0 \geq x$.
Finalement, f est convexe sur $\mathbb{R}^-$, concave sur $\mathbb{R}^+$ et admet un point d'inflexion en $x = 0$.
Pour le dessin, déterminer l'équation de la tangente en 0 : $y = f'(0)x + f(0)$ soit $y = \frac{1}{2}x$.
La courbe est en dessous de cette tangente en 0^+ et au-dessus en 0^- etc. ...

Corrigé de l'exercice 10

1. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ et $f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$. Donc f est bien convexe sur $\mathbb{R}$.

2. En appliquant l'inégalité de convexité (généralisée) à $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, on obtient : $f(\frac{1}{n}(y_1+...+y_n)) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(y_k)$

càd $\ln(1 + e^{\frac{1}{n}(y_1+...+y_n)}) \leq \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+e^{y_k})$ càd $\ln(1 + \prod\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n}y_k}) \leq \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+e^{y_k})$.
En choisissant maintenant pour tout $k \in [\![1,n]\!]$; $y_k = \ln(x_k)$, l'inégalité devient :
$\ln(1 + \prod\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n}\ln(x_k)}) \leq \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+e^{\ln(x_k)})$
D'où $\ln(1 + \prod\limits_{k=1}^{n} x_k^{1/n}) \leq \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+x_k) = \frac{1}{n}\ln(\prod\limits_{k=1}^{n}(1+x_k)) = \ln\left((\prod\limits_{k=1}^{n}(1+x_k))^{1/n}\right)$
Il reste à appliquer l'exponentielle (croissante) : $1 + \prod\limits_{k=1}^{n} x_k^{1/n} \leq (\prod\limits_{k=1}^{n}(1+x_k))^{1/n}$.
Soit encore, $1 + (\prod\limits_{k=1}^{n} x_k)^{1/n} \leq (\prod\limits_{k=1}^{n}(1+x_k))^{1/n}$.

3. Soit les a_k et b_k comme dans l'énoncé.
Alors en posant, pour tout k, $x_k = \frac{b_k}{a_k} > 0$, on peut appliquer la question 2.
$1 + \prod\limits_{k=1}^{n} (\frac{b_k}{a_k})^{1/n} \leq (\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{b_k}{a_k}))^{1/n}$.
D'où $1 + \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} b_k^{1/n}}{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k^{1/n}} \leq (\prod\limits_{k=1}^{n}(\frac{a_k+b_k}{a_k})^{1/n}$.

Il reste à mettre au même dénominateur : $\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k^{1/n}}[\prod\limits_{k=1}^{n} a_k^{1/n} + \prod\limits_{k=1}^{n} b_k^{1/n}] \leq \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{1/n}}{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k^{1/n}}$.

puis à simplifier par $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k^{1/n}$.

Corrigé de l'exercice 12

On remarque que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, qui est un ouvert, donc tout extrema local comme global sera à chercher parmi les points critiques ... De plus, il n'y aura pas forcément de minimum/maximum global (contrairement à si on se place sur un segment).

1. $g : x \mapsto x^3 - \frac{3}{5}x^5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 - 3x^4 = 3x^2(1-x^2)$.
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $(1-x^2) = 0$ donc 3 points critiques : 0, 1 et -1.

2. g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = 6x - 12x^3$ donc $g''(1) = -6 < 0$: maximum local en 1
$g''(-1) = -6 + 12 = 6 > 0$: minimum local en -1.
$g''(0) = 0$ donc on ne peut pas conclure.

3. Le signe de g' est celui de $(1-x^2)$: or $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Donc g est décroissante sur $]-\infty, -1]$, puis croissante sur $[-1, 1]$, puis décroissante à nouveau.
Comme $g(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} -\frac{3}{5}x^5$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
Donc (regarder les limites !)g n'admet pas d'extrema globaux, et en 0 (regarder le TV !), g n'admet pas d'extremum local.

Corrigé exercice 15

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. f est de classe C^2 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{-x} + a$, et $f''(x) = e^{-x} \geq 0$.
Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.
Comme $\mathbb{R}$ est un ouvert, on en déduit que si f admet un point critique, ce point critique sera un minimum global (cas

particulier des fonctions convexes, cf cours).
Et si f n'admet pas de point critique, f ne peut avoir d'extrema locaux comme globaux.

Or $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = a$.
Attention, penser à distinger les cas selon a ! !
Si $a > 0$, alors $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x = \ln(a) \Leftrightarrow x = -\ln(a)$. Donc si $a > 0$, f admet un point critique donc un minimum global en $-\ln(a)$.
En revanche, si $a \leq 0$, l'équation $f'(x) = 0$ n'admet aucune solution, donc f n'admet pas d'extrema sur $\mathbb{R}$.