Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Couple de variables discrètes

Corrigé exercice 2 question 1

Il faut déjà $a \geq 0$ pour obtenir que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) \geq 0$.

Étudions maintenant la cv de la série double à termes positifs $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} P((X = i) \cap (Y = j))$:

Fixons $i \in \mathbb{N}$.

Alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, $a \frac{i+j}{2^{i+j}} = a \frac{i}{2^{i+j}} + a \frac{j}{2^{i+j}} = \frac{ai}{2^i} \times (\frac{1}{2})^j + \frac{a}{2^{i+1}} \times (j(\frac{1}{2})^{j-1})$.

On reconnaît une combinaison linéaire de 2 termes généraux de séries géométriques convergentes car $|\frac{1}{2}| < 1$.

Donc la série $\sum_{j \geq 0} P((X = i) \cap (Y = j))$ converge, et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{ai}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^j + \frac{a}{2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} j(\frac{1}{2})^{j-1} = \frac{ai}{2^i} \frac{1}{1-1/2} + \frac{a}{2^{i+1}} \frac{1}{(1-1/2)^2} = \frac{ai}{2^{i-1}} + \frac{4a}{2^{i+1}}.$$

Or pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\frac{ai}{2^{i-1}} + \frac{4a}{2^{i+1}} = a \times i(\frac{1}{2})^{i-1} + 2a(\frac{1}{2})^i$ combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes.

Donc la série double $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} P((X = i) \cap (Y = j))$ converge bien et a pour somme :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a \frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{i=0}^{+\infty} [\frac{ai}{2^{i-1}} + \frac{4a}{2^{i+1}}] = a \sum_{i=0}^{+\infty} i(\frac{1}{2})^{i-1} + 2a \sum_{i=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^i = a \frac{1}{(1-1/2)^2} + 2a \frac{1}{1-1/2} = 4a + 4a = 8a.$$

Il faut donc que $a = \frac{1}{8}$ pour bien définir une loi de couple.

Indications exercice 5 :

c'est rigoureusement le même exercice que le 4 (et que l'exercice sur le péage et les guichets, feuille Variables aléatoires).

1. Sachant $(N = n)$, quelle loi suit X ?

Penser à conclure avec une accolade.

La seule différence par rapport à la l'exo 4 est que la loi binomiale de X sachant $N = n$ est maintenant la loi $\mathcal{B}(n, 0.2)$, et non $\mathcal{B}(n, p)$.

2. Bien poser $N(\Omega)$, $X(\Omega)$, les lettres k et n , puis passer de l'intersection au sachant. Attention de bien conclure avec une accolade !
3. Il faut commencer par appliquer la formule des probabilités totales avec un certain sce ... lequel ?

Ensuite, attention au moment de tout remplacer ! Vous ne pouvez pas remplacer $P((N = n) \cap (X = k))$ tant que vous ne savez pas si $k \leq n$ ou si $k > n$ (puisque l'expression est différente). Vous devez donc couper votre somme en 2....

4. Sans démonstration, ne signifie pas sans raisonnement, mais l'idée est de comprendre ce qui change pour "admettre" les calculs. Bref, essayer de voir qu'il suffit d'échanger le 0.8 et le 0.2 (puisque le succès devient l'échec et vice-versa), et donc que ceci peut se faire assez loin dans le calcul (après la FPT, après avoir coupé les sommes, après avoir sorti les constantes). Vous devez trouver que $Y \leftrightarrow \mathcal{P}(4)$.

5. Question piège :-)

Raisonnement faux : se dire qu'un colis étant soit détérioré soit en état, si X est grand, c'est que Y va être petit. Pourquoi c'est faux ? Parce que le nombre de colis (à savoir N) n'est pas une constante. (sinon, effectivement, il n'y aurait pas indépendance...) N est une variable aléatoire donc savoir que X est grand, ne vas pas induire Y petit (imaginer N très grand, donc X et Y pourraient être grands !!).

Bref, les variables X et Y vont en fait être indépendantes : pour le montrer, fixer $(k, j) \in \mathbb{N}^2$.

Alors d'après 2., $P((X = k) \cap (Y = j)) = P((X = k) \cap (N - X) = j) = P((X = k) \cap (N = k + j)) = P((N = k + j) \cap (X = k)) = e^{-5} \frac{5^{k+j}}{(k+j)!} \times \binom{k+j}{k} 0.2^k (0.8)^j$ (puisque $k \leq k + j$)

$$= e^{-5} \frac{1}{k!j!} 5^k 5^j (\frac{1}{5})^k (\frac{4}{5})^j = e^{-5} \frac{1}{k!j!} 1^k 4^j.$$

Par ailleurs, d'après 3 et 4, $P(X = k)P(Y = j) = e^{-1} \frac{1^k}{k!} e^{-4} \frac{4^j}{j!}$. On obtient bien l'égalité.

Corrigé exercice 7 question 6

Soit $(i, j, k) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

$$(X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k) = [B_1 \cap \dots \cap B_i \cap R_{i+1} \cap \dots \cap R_{i+j} \cap B_{i+j+1} \cap \dots \cap B_{i+j+k} \cap R_{i+j+k+1}] \cup [R_1 \cap \dots \cap R_i \cap B_{i+1} \cap \dots \cap B_{i+j} \cap R_{i+j+1} \cap \dots \cap R_{i+j+k} \cap B_{i+j+k+1}].$$

D'où (mêmes arguments que précédemment), $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k)) = (\frac{1}{6})^{i+k} (\frac{5}{6})^{j+1} + (\frac{5}{6})^{i+k} (\frac{1}{6})^{j+1}$.

C'est pour la fin de la question, qu'il y a les deux étoiles! Pour connaître la loi de X_3 il faut appliquer la FPT au s.c.e $\{(X_1 = i) \cap (X_2 = j), (i, j) \in \mathbb{N}^*\}^2$: Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors comme la série double à termes positifs converge par FPT, d'après la permutation de Fubini :

$$\begin{aligned} P(X_3 = k) &= \sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2} P((X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} [(\frac{1}{6})^{i+k} (\frac{5}{6})^{j+1} + (\frac{5}{6})^{i+k} (\frac{1}{6})^{j+1}] \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} [(\frac{1}{6})^{i+k} \frac{5}{6} \sum_{j=1}^{+\infty} (\frac{5}{6})^j + (\frac{5}{6})^{i+k} \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{+\infty} (\frac{1}{6})^j] = \sum_{i=1}^{+\infty} [(\frac{1}{6})^{i+k} \times \frac{5}{6} \times 5 + (\frac{5}{6})^{i+k} \times \frac{1}{6} \times 5] = \frac{25}{6} (\frac{1}{6})^k \sum_{i=1}^{+\infty} (\frac{1}{6})^i + \frac{1}{6 \times 5} (\frac{5}{6})^k \sum_{i=1}^{+\infty} (\frac{5}{6})^i \\ &= \frac{5}{6} (\frac{1}{6})^k + \frac{1}{6} (\frac{5}{6})^k. \end{aligned}$$

On reconnaît la loi de X_1 !

Corrigé de l'exercice 10

1. 3 arguments. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{6})$.

2. Ici pas d'indications sur comment partir pour déterminer la loi du couple. Réaliser que savoir X donne une information forte : nombre de lancers et fin de l'expérience.

On raisonne via les sachant : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors sachant $(X = n)$ quelle est la loi de Y ? Y compte le nombre de 1 obtenus : on repère une variable compteur ... typique de la loi binomiale. Attention, bien réfléchir pour les paramètres. Combien d'expériences répétées? Seulement $n - 1$ (car la n^{ie} est contrainte : elle a donné 6). Peut déjà se voir à l'aide des valeurs prises : en effet, sachant $(X = n)$, $Y(\Omega) = \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$.

Quelle proba de succès? attention pas $1/6$ (le 6 n'arrive pas, car on travaille sachant $(X = n)$) mais $1/5$.

Bref, sachant $(X = n)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n - 1, \frac{1}{5})$.

$$D'où $P_{(X=n)}(Y = k) = \begin{cases} \binom{n-1}{k} (\frac{1}{5})^k (\frac{4}{5})^{n-1-k} & \text{si } k \leq n - 1 \\ 0 & \text{si } k \geq n \end{cases}$.$$

3. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ (si X est grand, Y peut aussi être arbitrairement grand).

$$\text{Poser } n, k \in \dots \text{ Alors } P((X = n) \cap (Y = k)) = P(X = n) P_{(X=n)}(Y = k) = \dots = \begin{cases} \binom{n-1}{k} 4^{n-1-k} (\frac{1}{6})^n & \text{si } k \leq n - 1 \\ 0 & \text{si } k \geq n \end{cases}$$

(bien écrire l'accolade).

4. Fixer $k \in \mathbb{N}$. FPT appliquée au s.c.e. $\{(X = n), n \in \mathbb{N}\}$. D'où $P(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((X = n) \cap (Y = k)) =$

$$0 + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n-1}{k} 4^{n-1-k} (\frac{1}{6})^n = \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} 4^{m-k} (\frac{1}{6})^{m+1} = (\frac{1}{6})^{k+1} \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} (\frac{4}{6})^{m-k} = \dots = \frac{1}{2^{k+1}}$$
 (il suffit d'appliquer la somme de série donnée dans l'énoncé).

5. Reconnaître que $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})$.

6. Donc $Y + 1$ admet espérance et variance, donc $Y = (Y + 1) - 1$ admet une espérance (par linéarité) et une variance (par propriété) d'où $E(Y) = E(Y + 1) - 1 = 1$ et $V(Y) = V(Y + 1) = 2$

Corrigé de l'exercice 11

1. X compte le nombre de "succès" à savoir le nombre de correspondants obtenus lors de n appels; il y a la même probabilité p d'obtenir un correspondant lors de chaque appel, et les appels se font indépendamment les uns des autres. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

2. $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket = Y(\Omega)$.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Sachant $(X = k)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n - k, p)$ pour les mêmes raisons qu'au 1. (en effet, sachant $(X = k)$, il reste $n - k$ correspondants à obtenir et Y compte le nombre de succès). En particulier sachant $(X = k)$, $Y(\Omega) = \llbracket 0, n - k \rrbracket$.

$$D'où $P_{(X=k)}(Y = i) = \begin{cases} \binom{n-k}{i} p^i (1-p)^{n-k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n - k \\ 0 & \text{si } i > n - k \end{cases}$$$

D'où pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P((X = k) \cap (Y = i)) = P(X = k) P_{(X=k)}(Y = i) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n-k}{i} p^i (1-p)^{n-k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n - k \\ 0 & \text{si } i > n - k \end{cases}$$

3. Il suffit de remplacer les coefficients binomiaux par leur expression à l'aide des factorielles et de simplifier.

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{i!(n-k-i)!} = \frac{n!}{k!i!(n-k-i)!}.$$

$$\text{Et par ailleurs : } \binom{n}{j} \binom{n-j}{k} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(n-j)!}{k!(n-j-k)!} = \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!}.$$

D'où le résultat.

4. Soit $i \in Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X = k), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$

$$P(Y = i) = \sum_{k=0}^n P((X = k) \cap (Y = i)) = \sum_{k=0}^{n-i} P((X = k) \cap (Y = i)) + \sum_{k=n-i+1}^n P((X = k) \cap (Y = i))$$

$$= \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n-k}{i} p^i (1-p)^{n-k-i} + 0 = p^i (1-p)^{-i} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n-k}{i} (1-p)^{n-k}$$

$= \left(\frac{p}{1-p}\right)^i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{k} p^k ((1-p)^2)^{n-k} \binom{n-k}{i}$. On utilise le résultat de la question précédente (et par linéarité, on sort le coefficient binomial constant) :

$P(Y = i) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^i \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{n-i} p^k ((1-p)^2)^{n-k} \binom{n-k}{i}$. Il reste à voir que la somme est très proche de celle de la formule du binôme (en $n-i$)

$$P(Y = i) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^i \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} p^k ((1-p)^2)^{n-k-i} \times ((1-p)^2)^i = \left(\frac{p}{1-p}\right)^i \binom{n}{i} (p + (1-p)^2)^{n-i} \times ((1-p)^2)^i =$$

$$\binom{n}{i} (p(1-p))^i (p + 1 - 2p + p^2)^{n-i} = \binom{n}{i} (p - p^2)^i (1 - (p - p^2))^{n-i}.$$

D'où $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p - p^2) = \mathcal{B}(n, p(1-p))$.

5. Z représente le nombre total de correspondants obtenus après les deux tentatives.

Attention, X et Y ne sont pas indépendantes (il suffit de regarder $P(X = n, Y = 1) = 0 \neq P(X = n)P(Y = 1)$ pour le constater). Il faudra donc revenir à la loi du couple (X, Y) (et non faire le produit des probas ...).

$Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X = k), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$,

$$P(Z = j) = \sum_{k=0}^n P((X = k) \cap (X + Y = j)) = \sum_{k=0}^n P((X = k) \cap (Y = j - k)).$$

Il reste à voir pour quelles valeurs de k le terme à sommer est non-nul autrement dit, pour quelles valeurs de $k : 0 \leq j - k \leq n - k$ (d'après la loi du couple trouvée au 2.). Il faut donc $k \leq j$.

(Variante : regarder pour quelles valeurs de k on a $j - k \in Y(\Omega)$...).

Finalement, on trouve :

$$P(Z = j) = \sum_{k=0}^j P((X = k) \cap (Y = j - k)) = \sum_{k=0}^j \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n-k}{j-k} p^{j-k} (1-p)^{n-k-(j-k)}$$

$$= p^j \sum_{k=0}^j \binom{n}{k} (1-p)^{2n-k-j} \binom{n-k}{j-k}.$$

Or (chercher une formule analogue au 3., qui permettrait de pouvoir sortir un coeff binomial : il faut donc trouver une formule où dans l'un des coeffs binomiaux il n'y a plus la lettre k) $\binom{n}{k} \binom{n-k}{j-k} = \binom{n}{j} \binom{j}{j-k} = \binom{n}{j} \binom{j}{k}$ d'où

$$P(Z = j) = p^j (1-p)^{2n-j} \binom{n}{j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (1-p)^{-k} = p^j (1-p)^{2n-j} \binom{n}{j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \left(\frac{1}{1-p}\right)^k \times 1^{j-k} = p^j (1-p)^{2n-j} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{1-p} + 1\right)^j.$$

On pourrait bien sûr s'arrêter ici ... mais on peut aussi deviner que vu la forme, Z va suivre une loi binomiale : il faut alors continuer de réécrire les termes pour faire apparaître la forme voulue.

$$P(Z = j) = \binom{n}{j} ((1-p)^2)^{n-j} (1-p)^j p^j \left(\frac{2-p}{1-p}\right)^j = \binom{n}{j} (1-2p+p^2)^{n-j} (p(2-p))^j = \binom{n}{j} (1-p(2-p))^{n-j} (p(2-p))^j.$$

Ouf!

On trouve $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p(2-p))$.

Corrigé de l'exercice 14

$(Y - X)(\Omega) = \mathbb{Z}$ puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X = i), i \in \mathbb{N}^*\}$,

$$P(Y - X = n) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i, Y - X = n) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = i + n)) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i)P(Y = i + n)$$

par indépendance des variables X et Y .

Or $i + n \in Y(\Omega) \Leftrightarrow i + n \geq 1 \Leftrightarrow i \geq 1 - n$.

Attention, n peut être négatif! Deux cas possibles :

Soit $n \geq 0$: alors les conditions sur i pour que les termes de la somme soient non-nuls sont $\begin{cases} 1 \leq i \\ 1 - n \leq i \end{cases} \Leftrightarrow \{1 \leq i\}$

$$D'où $P(Y - X = n) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} q(1-q)^{i+n-1} = p^2(1-q)^n \sum_{i=1}^{+\infty} ((1-p)(1-q))^{i-1} = p^2(1-q)^n \sum_{j=0}^{+\infty} ((1-p)(1-q))^j =$$$

$$p^2(1-q)^n \times \frac{1}{1-(1-p)(1-q)} = p^2(1-q)^n \times \frac{1}{p+q-pq}$$

Soit $n \leq 0$, alors $1 - n \geq 1$ donc $\begin{cases} 1 \leq i \\ n + 1 \leq i \end{cases} \Leftrightarrow \{1 - n \leq i\}$

$$D'où $P(Y - X = n) = \sum_{i=1-n}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} q(1-q)^{i+n-1} = p^2(1-q)^n \sum_{i=1-n}^{+\infty} ((1-p)(1-q))^{i-1}$$$

$$= p^2(1-q)^n \sum_{j=-n}^{+\infty} ((1-p)(1-q))^j = p^2(1-q)^n \times \frac{((1-p)(1-q))^{-n}}{1-(1-p)(1-q)} p^2(1-p)^{-n} \times \frac{1}{p+q-pq}.$$

Corrigé de l'exercice 16 question 4 **

Comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, $S(\Omega) = \llbracket 2, 2n \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{(X_1 = i), i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$,

$P(S = k) = \sum_{i=1}^n P(X_1 = i, S = k) = \sum_{i=1}^n P((X_1 = i) \cap (X_2 = k - i)) = \sum_{i=1}^n P(X = i)P(X_2 = k - i)$ par indépendance des variables X_1 et X_2 .

Il reste à voir les conditions sur i pour que les termes de la somme soient non-nuls (et que l'on puisse remplacer les proba par leurs expressions classiques) : or $k - i \in \llbracket 1, n \rrbracket \Leftrightarrow 1 \leq k - i \leq n$. Donc finalement les conditions sont :

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k - i \leq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ k - n \leq i \leq k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \{ \max(1, k - n) \leq i \leq \min(n, k - 1) \}.$$

Deux cas sont à distinguer :

Soit $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$: alors $k - n \leq 1$ donc $\max(1, k - n) = 1$ et $k - 1 \leq n$ donc $\min(n, k - 1) = k - 1$.

$$\text{D'où } P(S = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{k-1}{n^2}.$$

Soit $k \in \llbracket n + 2, 2n \rrbracket$: alors $k - n \geq 1$ donc $\max(1, k - n) = k - n$ et $k - 1 \geq n$ donc $\min(n, k - 1) = n$.

$$\text{D'où } P(S = k) = \sum_{i=k-n}^n \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n-(k-n)+1}{n^2} = \frac{2n+1-k}{n^2}.$$

Corrigé de l'exercice 17

Cet exercice est très proche (au moins au début) de l'exercice 9, mais en plus complet.

- Les tirages se répètent indépendamment les uns des autres ; la probabilité d'avoir une boule blanche est la même à chaque tirage (p) et X est le temps d'attente de la première boule blanche donc $X \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$. En particulier X admet une espérance et une variance et $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

- (a) Soit $i \in X_1(\Omega) = \llbracket 1, +\infty \rrbracket$ et $j \in X_2(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

Comme la deuxième boule blanche est arrivée après la première, si $j \leq i$, $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = 0$.

Si maintenant $i < j$: posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement B_k " le k^{ie} tirage donne une boule k . Alors $(X_1 = i) \cap (X_2 = j) = \overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{B}_{i-1} \cap B_i \cap \overline{B}_{i+1} \cap \dots \cap \overline{B}_{j-1} \cap \overline{B}_j$ d'où par indépendance des tirages (avec remise), $P(X_1 = i) \cap (X_2 = j) = P(\overline{B}_1) \dots P(\overline{B}_{i-1}) P(B_i) P(\overline{B}_{i+1}) \dots P(\overline{B}_{j-1}) P(\overline{B}_j) = p^2(1-p)^{j-2}$ (en effet, on a fait j tirages en tout, et seulement deux ont donné une boule blanche).

Ne pas oublier de conclure cette question avec une accolade !

- (b) Soit $j \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{(X_1 = i), i \in \mathbb{N}^*\}$,

$$P(X_2 = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \sum_{i=1}^{j-1} P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) + 0 = \sum_{i=1}^{j-1} p^2(1-p)^{j-2} = p^2(1-p)^{j-2}(j-1) \text{ (somme d'une constante).}$$

- (c) $U_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{(X_1 = i), i \in \mathbb{N}^*\}$,

$$P(U_2 = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X_1 = i) \cap (U_2 = k)) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X_1 = i) \cap (X_2 - X_1 = k)) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X_1 = i) \cap (X_2 = k + i)) = \sum_{i=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{k+i-2} \text{ d'après la loi du couple trouvée an 2.(a) (ici, pour tout } i \in \mathbb{N}^*, k + i > i \text{ donc on utilise dans tous les termes le cas } i < j).$$

Il reste à calculer cette somme :

$$P(U_2 = k) = p^2(1-p)^{k-1} \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} = p^2(1-p)^{k-1} \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j = p^2(1-p)^{k-1} \frac{1}{1-(1-p)} = p(1-p)^{k-1}.$$

On reconnaît que U_2 suit la loi géométrique de paramètre p (essayer de réaliser qu'on peut l'intuiter : $X_2 - X_1$ mesure le temps d'attente entre la 1ere et la 2e boule blanche : donc c'est le temps d'attente d'un premier succès)

- (d) Posons $i \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $P(X_1 = i)P(U_2 = k) = p(1-p)^{i-1}p(1-p)^{k-1}$ d'après 1. et 2.(c).

Par ailleurs, $P((X_1 = i) \cap (U_2 = k)) = P((X_1 = i) \cap (X_2 - X_1 = k)) = P((X_1 = i) \cap (X_2 = k + i)) = p^2(1-p)^{k+i-2}$ d'après 2.(a) puisque $k + i > i$.

Donc on a bien pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_1 = i)P(U_2 = k) = P((X_1 = i) \cap (U_2 = k))$. Les variables X_1 et U_2 sont indépendantes.

- (e) $X_2 = U_2 + X_1$ donc par linéarité, X_2 admet une espérance et $E(X_2) = E(U_2) + E(X_1) = \frac{2}{p}$.

- (a) $Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car on peut avoir une boule noire dès le premier tirage. (Y_1 suit la loi géométrique de paramètre q).

Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors si $i = n$, $P(X_1 = i, Y_1 = n) = 0$ puisqu'on ne tire qu'une boule lors d'un tirage. Puis si $i < n$, $((X_1 = i) \cap (Y_1 = n)) = R_1 \cap \dots \cap R_{i-1} \cap B_i \cap \overline{N}_{i+1} \cap \dots \cap \overline{N}_{n-1} \cap N_n$ d'où $P((X_1 = i) \cap (Y_1 = n)) = r^{i-1}p(1-q)^{n-i-1}q$. (en effet entre le tirage $i + 1$ et le tirage $n - 1$ il y a $n - 1 - (i + 1) + 1 = n - i - 1$ tirages).

De même si $n < i$, $((X_1 = i) \cap (Y_1 = n)) = R_1 \cap \dots \cap R_{n-1} \cap N_n \cap \overline{B}_{n+1} \cap \dots \cap \overline{B}_{i-1} \cap B_i$ et $P((X_1 = i) \cap (Y_1 = n)) = r^{n-1}q(1-p)^{i-n-1}p$.

(b) Si un tirage a donné une blanche ... c'est qu'il n'a pas donné une noire, donc les variables ne seront pas indépendantes.

Par exemple $P(X_1 = 1)P(Y_1 = 1) = pq \neq 0$ et mais $P(X_1 = 1, Y_1 = 1) = 0$.

4. * Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Sachant $(X_1 = k)$, $W(\Omega) = \llbracket 0, k - 1 \rrbracket$. Plus précisément, sachant $(X_1 = k)$, on effectue $k - 1$ tirages avec remise dont les issues sont des noires ou des rouges, et on compte le nombre de boules rouges. D'où sachant $(X_1 = k)$, W va suivre une loi binomiale de paramètres $(k - 1)$ et $\frac{r}{r+q}$.