

Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Ensembles (compléments)

Corrigé exercice 1

1. $A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = \{1, 2, 4\}$, $A \cap \overline{B} = \{1\}$, car $\overline{B} = \{1, 3\}$, $\overline{A} \cap B = \{4\}$ car $\overline{A} = \{3, 4\}$.
2. $A \cap B = [1, 2]$, $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap \overline{B} =]-\infty, 1[$ car $\overline{B} =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ car $\overline{A} =]2, +\infty[$ car $\overline{A} \cap B =]2, +\infty[\subset B$.
3. $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$ (ne se simplifie pas), $A \cap \overline{B} = A$ car $A \subset \overline{B} =]-\infty, 2[$ et $\overline{A} \cap B = B$ car $B \subset \overline{A} =]1, +\infty[$.

Corrigé exercice 2

D'après les lois de Morgan, $\overline{A \cap (B \cup C)} = \overline{A} \cup \overline{B \cup C} = \overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$ par distributivité.

Corrigé fin exercice 4

3. $\Rightarrow$ Supposons que $A \subset B$ et montrons que $\overline{B} \subset \overline{A}$:

Fixons $b \in \overline{B}$. but : mq $b \in \overline{A}$ càd que $b \notin A$.

Or si $b \in A$, alors comme $A \subset B$, on aurait $b \in B$ ce qui ne peut pas puisque $b \in \overline{B}$.

Donc on a bien $b \notin A$, c'est-à-dire $b \in \overline{A}$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que $\overline{B} \subset \overline{A}$. Alors d'après le sens direct, on en déduit que $\overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{B}}$ d'où $A \subset B$.
(ou sinon, faire un raisonnement analogue au sens direct !)

4. La formule est dans le cours : c'est la formule de "distributivité". Le but ici est d'en faire la preuve. Par double inclusion :

" $\subset$ " : soit $x \in (A \cup B) \cap C$: but montrer que $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Comme $x \in (A \cup B) \cap C$, on sait que $x \in C$ et que $x \in A$ ou $x \in B$. Il y a donc deux cas possibles :

soit $x \in A$, mais alors, comme $x \in C$, on a $x \in A \cap C$.

soit $x \in B$, mais alors comme $x \in C$, on a $x \in B \cap C$.

D'où $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap C$ càd $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Inclusion réciproque : soit $(A \cap C) \cup (B \cap C)$: alors deux cas sont possibles soit $x \in A \cap C$: ce qui signifie $x \in A$ et $x \in C$

soit $x \in B \cap C$: ce qui signifie $x \in B$ et $x \in C$

On a donc dans tous les cas $x \in C$, et ensuite, soit $x \in A$ soit $x \in B$ ce qui s'écrit $x \in C \cap (A \cup B)$.

Corrigé exercice 5

On peut choisir par exemple $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Le but est donc de trouver A , B et C tels que $A \cap B = A \cap C$ mais tels que $B \neq C$.

Par exemple : $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$ et $C = \{1, 5\}$.

Pour la deuxième question : $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ et $C = \{3, 4\}$ conviennent.

Corrigé fin exercice 6 :

La suite (C_n) est croissante (donc même cas que les (A_n)) : en effet $C_1 = [1, +\infty[$ $C_2 = [\frac{1}{2}, +\infty[$ puisque $\frac{1}{2} < 1$ etc.etc.

Donc $C_1 \cap \dots \cap C_{10} = C_1 = [1, +\infty[$ et $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{10} = C_{10} = [\frac{1}{10}, +\infty[$.

On obtient également : $\bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k = C_1 = [-1, 1]$, et $\bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k =]0, +\infty[$ (attention, le 0 est exclu : il n'appartient à aucun C_n même si n est très très grand).

La suite (D_n) est décroissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_{n+1} \subset D_n$ d'où $D_1 \cap \dots \cap D_{10} = D_1 = [-1, 1]$ et $D_1 \cap \dots \cap D_{10} = D_{10} = [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$.

On obtient également : $\bigcup_{k=1}^{+\infty} D_k = D_1 = [-1, 1]$, et $\bigcap_{k=1}^{+\infty} D_k = \{0\}$ (réaliser que le 0 est bien inclus : pour tout k , $0 \in D_k$!!!).

De même la suite (E_n) est décroissante :

$E_1 \cap \dots \cap E_{10} = E_1 = [-1, +\infty[$ et $E_1 \cap \dots \cap E_{10} = E_{10} = [-\frac{1}{10}, +\infty[$.

On obtient également : $\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k = E_1 = [-1, +\infty[$, et $\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k = [0, +\infty[$.

Corrigé exercice 8 :

1. Etape 1 : montrer $\Rightarrow$. On suppose que $A \cup B = A \cap C$.

Montrons que $B \subset A$: soit $x \in B$ (but mq $x \in A$).

Comme $x \in B$, on a $x \in A \cup B$, donc par hypothèse, on a $x \in A \cap C$. En particulier, $x \in A$.

Ou écrire : $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A$.

Montrons que $A \subset C$: soit $x \in A$ (but : mq $x \in C$).

Comme $x \in A$, on a $x \in A \cup B$ donc par hypothèse, $x \in A \cap C$. En particulier, $x \in C$.

OU écrire, : $A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$.

Etape 2 : réciproque. On suppose que $B \subset A$ et $A \subset C$. Montrons que $A \cup B = A \cap C$.

Soit version courte, qui s'appuie sur des résultats du cours : comme $B \subset A$, alors $A \cup B = A$ et comme $A \subset C$, alors $A \cap C = A$. D'où l'égalité : $A \cup B = A \cap C$.

Soit par double inclusion.

Montrons que $A \cap C \subset A \cup B$: comme $A \cap C \subset A$, et que $A \subset A \cup B$, on a bien $A \cap C \subset A \cup B$. (ou poser x ...)

Montrons que $A \cup B \subset A \cap C$: soit $x \in A \cup B$.

Si $x \in A$, alors comme $A \subset C$, on a aussi $x \in C$ d'où $x \in A \cap C$.

Si $x \in B$, alors comme $B \subset A$, $x \in A$ et on se ramène au cas précédent. Dans tous les cas, on a bien $x \in A \cap C$.

2. D'après 1, si $A \cup B = A \cap C$, alors $B \subset A$ et $A \subset C$.

Et par symétrie (échanger les lettres dans 1.) : si $B \cup C = B \cap A$, alors $C \subset B$ et $B \subset A$. et si $C \cup A = C \cap B$, alors $A \subset C$ et $C \subset B$.

On a donc : $B \subset A \subset C \subset B$ d'où $A = B = C$.

Corrigé exercice 9 :

- Penser à l'ensemble vide et à $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.
- Penser aux accolades extérieures puisque $\mathcal{P}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$ est un ensemble, ET à toutes les accolades pour les différentes parties (puisque un élément ici est une partie donc un sous-ensemble)
- $\mathcal{P}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$ doit contenir au total $2^6 = 64$ parties. Donc inutile de les écrire toutes.
- pour tout k , $\binom{6}{k}$ donne le nombre de parties à k éléments.

$$\mathcal{P}(\llbracket 1, 6 \rrbracket) = \{\emptyset; \{1\}; \dots; \{6\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \dots; \{5, 6\}; \{1, 2, 3\}, \dots, \{4, 5, 6\}; \{1, 2, 3, 4\}; \dots; \{3, 4, 5, 6\}; \{1, 2, 3, 4, 5\}; \dots; \{2, 3, 4, 5, 6\}; \llbracket 1, 6 \rrbracket\}.$$