

Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille : Espaces probabilisés finis

Exercice 1

- (a) $A \cup B \cup C$
- (b) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ (= le contraire du (a) !)
- (c) $A \cap B \cap \bar{C}$
- (d) $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$
- (e) $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

Corrigé exercice 3

On est vraiment dans la situation de l'exercice 2. On va calculer les probabilités en comptant le nombre d'issues. Il faut donc commencer par déterminer Ω , son cardinal, puis décrire toutes les issues de l'événement A de la première question pour obtenir son cardinal etc.

On trouve $\Omega = \llbracket 1, 7 \rrbracket^2$, $\text{card}(\omega) = 7^2$, $A = \{(1; 1), (2; 2), \dots, (7; 7)\}$ d'où $\text{card}(A) = 7$ et comme la situation est équiprobable $P(A) = \frac{7}{7^2} = \frac{1}{7}$.

SOit B l'événement de la question 2. : $B = \{(1; 2), (1; 3), \dots, (1; 7), (2; 3), \dots, (2; 7), \dots, (6; 7)\}$. D'où $\text{Card}(B) = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ et $P(B) = \frac{3 \times 7}{7^2} = \frac{3}{7}$.

Corrigé fin exercice 4

E_n "le premier pile arrive au 3e lancer" :
pour commencer avec $n = 4$

remarquer que la contrainte porte sur les 3 premiers lancers (pas de pile au 1er et 2e lancer, pile au 3e) mais ensuite il n'y a plus de contraintes. En effet si on a un pile au premier ou au deuxième lancer, le pile du 3e lancer ne serait pas le premier pile ! En revanche, après le 3e lancer tout peut arriver.

D'où $E_4 = F_1 \cap F_2 \cap P_3$.

Pourquoi ne pas spécifier les issues possibles pour le dernier lancer ? Parce que ça ne change rien puisque tout est possible. Pour le comprendre : si vous aviez marqué $E_4 = (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$ c'était bien sûr juste et en fait c'est la même chose.

En effet, $(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) = F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap (F_4 \cup P_4) = F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \Omega = F_1 \cap F_2 \cap P_3$ puisque Ω est "tout".

Plus généralement, avec n quelconque, $E_n = F_1 \cap F_2 \cap P_3$ (on ne spécifie pas les lancers suivants, car tout est possible, donc cela donne "Ω").

Corrigé exercice 5

1. Formule du crible :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$P(A_1)$: à chaque lancer de dé, il y a deux issues favorables (2 ou 3) sur les 3 et on effectue n lancers indépendants avec des dés équilibrés (donc la situation est équiprobable) : $P(A_1) = (\frac{2}{3})^n$.

$P(A_1 \cap A_2)$: à chaque lancer de dé, il y a une issue favorable (3) sur les 3 et on effectue n lancers :

$$P(A_1 \cap A_2) = (\frac{1}{3})^n. \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset \text{ donc } P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.$$

Et par symétrie, de même pour les autres probabilités.

$$\text{Finalement, } P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3(\frac{2}{3})^n - 3(\frac{1}{3})^n.$$

Puis on remarque que "les 3 numéros sont apparus au cours des n lancers" = $\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$, d'où $p_n = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - 3(\frac{2}{3})^n + 3(\frac{1}{3})^n$.

2. Comme $|\frac{1}{3}| < 1$ et $|\frac{2}{3}| < 1$, on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$. A condition de faire suffisamment de lancers, on est presque sûr d'obtenir tous les chiffres ...

Corrigé exercice 8

FPC : $P(R_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap R_4) = P(R_1)P_{R_1}(V_2)P_{R_1 \cap V_2}(V_3)P_{R_1 \cap V_2 \cap V_3}(R_4) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7}$ (tirages en situation équiprobable etc.)

Corrigé exercice 10 Question 3

Rappel : on note B l'événement "exactement un bonbon jaune" dans la question 2.

Attention de bien traduire le "sachant" en terme de probabilité ! (pas de sachant possible sur des événements : seulement $\cap$ ou $\cup$).

La question demande ici de calculer $P_B(J_n)$.

Or par définition, $P_B(J_n) = \frac{P(B \cap J_n)}{P(B)}$ donc il reste à calculer $P(B \cap J_n)$.

Mais vu la description de B faite en 2., $B \cap J_n = R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{n-1} \cap J_n$ d'où $P(B \cap J_n) = (\frac{r}{r+j})^{n-1} \frac{j}{(r+j)}$.

Corrigé exercice 11

On introduit pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, les événements B_i (resp. R_i, V_i) "le i^e tirage donne une boule bleue (resp. rouge, verte)" ainsi que l'événement A "la composition de l'urne n'a pas changé à l'issue des 3 manipulations".

Alors $A = (B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (B_1 \cap R_2 \cap V_3) \cup (B_1 \cap V_2 \cap V_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap V_3) \cup (R_1 \cap V_2 \cap V_3) \cup (R_2 \cap B_1 \cap B_3) \cup (R_2 \cap B_1 \cap V_3) \cup (R_2 \cap V_1 \cap V_3) \cup (V_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (V_1 \cap B_2 \cap V_3) \cup (V_1 \cap V_2 \cap V_3)$ réunion de 6 événements deux à deux incompatibles. Et d'après la formule des probabilités composées, on obtient :

$A = (B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (V_1 \cap B_2 \cap V_3) \cup (V_1 \cap R_2 \cap V_3) \cup (V_1 \cap V_2 \cap V_3)$ réunion de 6 événements deux à deux incompatibles. Et d'après la formule des probabilités composées, on obtient :

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3) + P(B_1)P_{B_1}(R_2)P_{B_1 \cap R_2}(B_3) + \dots \\ = \frac{3}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{5}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{7}{10} \\ \text{(ici le résultat n'est pas très intéressant, donc je m'arrête avant le calcul ...)}$$

Corrigé exercice 12

On introduit l'événement d'intérêt : A_n "la somme des numéros obtenus est paire", ainsi que les événements élémentaires : pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, P_k (resp I_k) "le k^e lancer donne un nombre pair (resp. impair)". Le but est de déterminer $p_n = P(A_n)$.

$n=1$: $A_1 = P_1$, donc il y a 3 issues favorables $\{2, 4, 6\}$ sur les 6, et comme le dé est équilibré $p_1 = P(A_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$n=2$: $A_2 = (P_1 \cap P_2) \cup (I_1 \cap I_2)$ réunion de deux événements incompatibles.

Par indépendance des lancers, $P(A_2) = P(P_1)P(P_2) + P(I_1)P(I_2) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $p_n = \frac{1}{2}$.

L'initialisation a été faite ci-dessus.

Supposons que $P(A_n) = \frac{1}{2}$ et montrons que $P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

Or la réalisation de A_{n+1} dépend de celle de A_n (savoir si on a déjà une somme paire ou non, avec le passé)

Formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $(A_n, \overline{A_n})$ de probabilités non-nulles :

$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \stackrel{H.R.}{=} \frac{1}{2}P_{A_n}(A_{n+1}) + (1 - \frac{1}{2})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$. Or $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, car

sachant A_n , A_{n+1} se réalise ssi le dernier lancer (le lancer $n+1$) donne un nombre pair. De même, $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

D'où $P(A_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Conclure

(la rédaction à la main suivante est juste, mais est moins dans l'esprit du programme, qui vous demande de savoir repérer et appliquer la FPT : $A_{n+1} = (A_n \cap P_{n+1}) \cup (\overline{A_n} \cap I_{n+1})$

réunion de 2 événements incompatibles, et indépendance des lancers d'où

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P(P_{n+1}) + (1 - P(A_n))P(I_{n+1}) \stackrel{H.R.}{=} \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} + (1 - \frac{1}{2}) \times \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.)$$

Corrigé exercice 13

On pose A (resp. B, C et D) l'événement "l'élève choisit l'itinéraire A (resp. B, C et D)".

On pose également R "l'élève est en retard".

1. L'élève choisit un et un seul itinéraire donc la famille (A, B, C, D) forme un s.c.e.

En particulier, $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$ d'où $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 2P(D) = 1$ et finalement, $P(D) = \frac{5}{24}$.

2. Le but est de calculer $P_R(C)$. D'après la formule de Bayes, $P_R(C) = \frac{P(C)P_C(R)}{P(R)} = \frac{\frac{5}{24} \times \frac{1}{5}}{\frac{5}{24}}$.

Or d'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. (A, B, C, D) de probabilités non-nulles ,

$$P(R) = P(A)P_A(R) + P(B)P_B(R) + P(C)P_C(R) + P(D)P_D(R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{20} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{5}{24} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{24} \times 0.$$

Attention, ce n'est pas parce que $P_D(R) = 0$ qu'il faut inventer une formule des probas totales avec (A, B, C) comme s.c.e.. En effet, (A, B, C) n'est pas un s.c.e.!! ($A \cup B \cup C \neq \Omega$)... Donc il est obligatoire de marquer la formule avec les 4 termes (y compris celui qui concerne D). Ce n'est qu'ensuite, que l'on enlève le terme nul.

Corrigé exercice 15

Attention de bien introduire les événements élémentaires !

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, F_k "l'appareil fonctionne à l'instant k ".

Les données de l'énoncé sont donc : $P_{F_{n-1}(\overline{F_n})} = a$ et $P_{\overline{F_{n-1}}}(F_n) = b$. On note également $p_n = P(F_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On est encore dans la situation d'un arbre à deux états (marche/panne) où l'on se place à l'instant $n-1$ puis n .

(même situation que l'exercice 14 et 26).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. $(F_{n-1}, \overline{F_{n-1}})$, on obtient :

$$p_n = P(F_n) = P(F_{n-1}) \times P_{F_{n-1}}(F_n) + P(\overline{F_{n-1}})P_{\overline{F_{n-1}}}(F_n) = p_{n-1} \times a + (1 - p_{n-1}) \times (1 - b).$$

En réécrivant cette relation de récurrence, on en déduit :
 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = ap_{n-1} + 1 - b - (1 - b)p_{n-1} = p_{n-1}(a + b - 1) + (1 - b)$.
 On reconnaît donc une suite arithmético-géométrique.

On commence par résoudre l'équation : $\alpha = \alpha(a + b - 1) + (1 - b)$ On trouve comme unique solution : $\alpha = \frac{1-b}{2-a-b}$
 (en effet, $2 - a - b > 0$ car $a < 1$ et $b < 1$).

On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = p_n - \alpha$. La suite v est géométrique de raison $(1 - a - b)$ et de premier terme $v_0 = p_0 - \alpha$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (1 - a - b)^n(p_0 - \alpha)$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = (1 - a - b)^n(p_0 - \alpha) + \alpha$.

Comme $-1 < 1 - a - b < 1$ (construire : $0 < a + b < 2$ donc $0 > -a - b > -2$ et $1 > 1 - a - b > -1$), on en déduit que $(1 - a - b)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'où $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha = \frac{1-b}{2-a-b} \in \mathbb{R}$.

La suite (p_n) converge

Corrigé exercice 16

On peut introduire de manière analogue les événements N_k ou utiliser les $\overline{R_k}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Les tirages se font en situation équiprobable, donc $P(R_1) = \frac{r}{r+n}$.
 D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. (R_1, N_1) de probabilités non-nulles,
 $P(R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) + P(N_1)P_{N_1}(R_2) = \frac{r}{r+n} \times \frac{r+d}{r+n+d} + \frac{n}{r+n} \times \frac{r}{r+n+d}$ car avant le deuxième tirage, on ajoute d boules de la couleur tirée dans l'urne. D'où $P(R_2) = \frac{r \times (r+d) + n \times r}{(r+n)(r+n+d)} = \frac{r(r+d+n)}{(r+n)(r+n+d)} = \frac{r}{r+n} = P(R_1)$.
2. D'après la formule de Bayes, $P_{R_2}(R_1) = \frac{P(R_1)P_{R_1}(R_2)}{P(R_2)} = P_{R_1}(R_2) = \frac{r+d}{r+n+d}$.
3. ** Le but est de calculer $p = P_{R_2 \cap \dots \cap R_k}(R_1)$.

D'après la définition de la probabilité conditionnelle, $p = \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k)}{P(R_2 \cap \dots \cap R_k)}$.

Calcul du numérateur : d'après la formule des probabilités composées (toutes les probabilités sachant sont bien définies)

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) \dots P_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{k-1}}(R_k) = \frac{r}{r+n} \times \frac{r+d}{r+n+d} \times \frac{r+2d}{r+n+2d} \times \dots \times \frac{r+(k-1)d}{r+n+(k-1)d}.$$

Calcul du dénominateur : il nous manque l'information de ce qu'a donné le premier tirage.

On utilise donc la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. (R_1, N_1) :

$$P(R_2 \cap \dots \cap R_k) = P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k) + P(N_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k)$$

$$\text{donc finalement, } p = \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k)}{P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k) + P(N_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k)} = \frac{1}{1 + \frac{P(N_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k)}{P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k)}}.$$

Il reste donc à calculer $P(N_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k)$.

Comme précédemment, d'après la formule des probabilités composées

$$P(N_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k) = P(N_1)P_{N_1}(R_2) \dots P_{N_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{k-1}}(R_k) = \frac{n}{r+n} \times \frac{r}{r+n+d} \times \frac{r+d}{r+n+2d} \times \dots \times \frac{r+(k-2)d}{r+n+(k-1)d}.$$

En effet, au moment du k^{ie} tirage, on a effectué $k - 1$ tirages avant, donc on a ajouté $(k - 1)$ fois d boules : une fois concernait des noires, mais $k - 2$ fois concernaient des rouges.

$$\text{Finalement, par quotient et télescopage : } \frac{P(N_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k)}{P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k)} = \frac{n}{r+(k-1)d}$$

$$\text{On en déduit que la probabilité cherchée est } p = \frac{1}{1 + \frac{n}{r+(k-1)d}} = \frac{r+(k-1)d}{r+n+(k-1)d}$$

Corrigé exercice 18

1. (a) Soit A_n l'événement "ne jamais lancer la pièce 2 au cours des n premiers lancers".
 Alors $A_n = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ et d'après la formule des probabilités composées ($P(U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}) \neq 0$) :
 $P(A_n) = P(U_1)P_{U_1}(U_2)P_{U_1 \cap U_2}(U_3) \dots P_{U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}}(U_n)$.
 Or le choix de la pièce pour le premier lancer se fait au hasard donc $P(U_1) = \frac{1}{2}$, puis sachant que l'on fait un lancer avec la pièce 1, le lancer suivant se fera avec la pièce 1 ssi le précédent lancer (qui se fait donc avec la pièce 1) a donné pile.
 D'où $P(A_n) = \frac{1}{2} \times p_1 \times \dots \times p_1 = \frac{1}{2}(p_1)^{n-1}$.
- (b) On introduit l'événement B_n "lancer pour la première fois la pièce 2 au n^{ie} lancer".
 Si $n = 1$, $B_1 = \overline{U_1}$ et $P(B_1) = \frac{1}{2}$.
 Si $n \geq 2$, $B_n = U_1 \cap \dots \cap U_{n-1} \cap \overline{U_n}$ et d'après la formule des probabilités composées
 $P(B_n) = P(U_1)P_{U_1}(U_2) \dots P_{U_1 \cap \dots \cap U_{n-2}}(U_{n-1})P_{U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}}(\overline{U_n})$.
 Or sachant U_{n-1} , il faut avoir obtenu face avec cette pièce 1 pour que le dernier lancer s'effectue avec la pièce 2. D'où $P_{U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}}(\overline{U_n}) = 1 - p_1$ et on obtient $P(B_n) = \frac{1}{2}p_1 \times \dots \times p_1 \times (1 - p_1) = \frac{1}{2}(p_1)^{n-2}(1 - p_1)$.
2. D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. de probabilités non-nulles $(U_n, \overline{U_n})$:
 $P(U_{n+1}) = P(U_n)P_{U_n}(U_{n+1}) + P(\overline{U_n})P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = u_n p_1 + (1 - u_n)(1 - p_2)$.
 En effet, sachant $\overline{U_n}$, le lancer s'effectue avec la pièce 2, et doit donner face pour qu'il y ait un changement de pièce au lancer suivant : d'où $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = 1 - p_2$.

On en déduit $u_{n+1} = (p_1 + p_2 - 1)u_n + (1 - p_2)$ et on reconnaît une suite arithmético-géométrique.

On résout : $\alpha = (p_1 + p_2 - 1)\alpha + (1 - p_2) \Leftrightarrow \alpha(2 - p_1 - p_2) = 1 - p_2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2}$ car $2 - p_1 - p_2 > 0$ donc $2 - p_1 - p_2 \neq 0$.

On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \alpha$, qui est une suite géométrique de raison $p_1 + p_2 - 1$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (p_1 + p_2 - 1)^{n-1}v_1$ avec $v_1 = u_1 - \alpha = \frac{1}{2} - \alpha$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (p_1 + p_2 - 1)^{n-1}(\frac{1}{2} - \alpha) + \alpha$.

On remarque (sera demandé au 3.) que comme $-1 < p_1 + p_2 - 1 < 1$, $(p_1 + p_2 - 1)^{n-1} \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow \alpha$.

3. On introduit P_n "obtenir pile au n^e lancer".

Pour calculer la probabilité d'obtenir pile au n^e lancer, il suffit de savoir avec quelle pièce on effectue ce lancer !

On applique donc la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. $(U_n, \bar{U}_n)$.

$$r_n = P(P_n) = P(U_n)P_{U_n}(P_n) + P(\bar{U}_n)P_{\bar{U}_n}(P_n) = u_n p_1 + (1 - u_n)p_2 \rightarrow \alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2.$$

Corrigé exercice 19 **

Posons pour tout $n \geq 1$ l'événement A_n "au cours des n premiers lancers, on n'a jamais obtenu deux piles consécutifs". Ainsi $p_n = P(A_n)$. (**Attention**, l'introduction de ces événements est nécessaire car la description est obligatoire avant de passer aux probabilités).

1. $p_1 = 1$, car en un lancer, on ne peut jamais obtenir deux piles !

$A_2 = (F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2)$ (remarquer qu'après un face, pas de contrainte, mais après un pile, il faut un face pour ne pas avoir deux piles consécutifs ...). Réunion de 3 événements deux à deux incompatibles, et indépendance des lancers d'où $p_2 = P(A_2) = P(F_1)P(F_2) + P(F_1)P(P_2) + P(P_1)P(F_2) = \frac{3}{4}$.

$A_3 = (F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$ réunion de 5 événements deux à deux incompatibles et de même probabilité $\frac{1}{8}$ d'où $p_3 = \frac{5}{8}$.

Pour alléger la description, on pourrait remarquer que par exemple $(F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3) = F_1 \cap F_2 \dots$

2. Se ramener à la définition d'un s.c.e. (attention, cela ne revient pas à vq la somme des probas fait 1 !!)

$$(P_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2) \cap F_1 = (P_1 \cap (P_2 \cup F_2)) \cup F_1 = P_1 \cup F_1 = \Omega.$$

$$\text{Par ailleurs, } (P_1 \cap P_2) \cap (P_1 \cap F_2) = \emptyset, (P_1 \cap P_2) \cap F_1 = \emptyset, (P_1 \cap F_2) \cap F_1 = \emptyset.$$

3. Soit $n \geq 3$. Formule des probabilités totales appliquée à ce s.c.e. :

$$P(A_n) = P(P_1 \cap P_2)P_{P_1 \cap P_2}(A_n) + P(P_1 \cap F_2)P_{P_1 \cap F_2}(A_n) + P(F_1)P_{F_1}(A_n).$$

Or $P_{P_1 \cap P_2}(A_n) = 0$ vu la définition de A_n (il ne faut pas de piles consécutifs pour que A_n se réalise).

De plus, sachant que F_1 se réalise alors : A_n se réalise ssi pendant les $n - 1$ lancers restants (du 2^e au n^e), il n'y a pas deux piles consécutifs. Sans contrainte sur le premier lancer restant puisque on a eu F_1 . La probabilité est donc la même que celle que A_{n-1} se réalise. D'où $P_{F_1}(A_n) = P(A_{n-1}) = p_{n-1}$.

Enfin, sachant que $P_1 \cap F_2$ se réalise, A_n se réalise ssi pendant les $n - 2$ lancers restants (du 3^e au n^e), il n'y a pas deux piles consécutifs. Sans contrainte sur le premier lancer restant puisque on a eu F_2 (qui "annule" la contrainte du P_1). La probabilité est donc la même que celle que A_{n-2} se réalise. D'où $P_{P_1 \cap F_2}(A_n) = P(A_{n-2}) = p_{n-2}$.

$$\text{On en déduit que } p_n = P(A_n) = 0 + P(P_1 \cap F_2)p_{n-2} + P(F_1)p_{n-1} = \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{1}{2}p_{n-1}.$$

4. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Equation caractéristique : $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$. $\Delta = \frac{5}{4} > 0$. Deux racines distinctes $\frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Donc il existe un unique couple (λ, μ) de réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \lambda(\frac{1-\sqrt{5}}{4})^n + \mu(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^n$. Il reste à trouver λ et μ en résolvant le système

$$\begin{cases} \lambda(\frac{1-\sqrt{5}}{4}) + \mu(\frac{1+\sqrt{5}}{4}) = p_1 \\ \lambda(\frac{1-\sqrt{5}}{4})^2 + \mu(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2 = p_2 \end{cases}$$

$$\text{Système un peu technique, mais facilité si on supprime les fractions ; on arrive à : } \begin{cases} \lambda(1 - \sqrt{5}) + \mu(1 + \sqrt{5}) = 4 \\ \lambda(3 - \sqrt{5}) + \mu(3 + \sqrt{5}) = 6 \end{cases}.$$

Il reste alors à faire l'opération L_2 reçoit $L_2 - L_1 : \lambda + \mu = 1$.

On substitue alors μ (ou λ) dans L_1 .

$$\text{Sauf erreur de calcul de ma part, on trouve } \lambda = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } \mu = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Pour trouver la limite de p_n , (inutile d'avoir déterminé λ et μ), il suffit de remarquer que comme $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$, on a : $-1 < -\frac{2}{4} < \frac{1-\sqrt{5}}{4} < \frac{-1}{4} < 1$ et de même, $0 < \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1$. D'où $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Corrigé exercice 20

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 8 hauteurs (du 7 à l'as) dont 3 hauteurs de figure (valet, dame, roi) et 4 couleurs (coeur, carreau, pique, trèfle). Par ailleurs, ici, la situation est équiprobable.

1. On remarque que $P_A(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (car deux rois sur les 4 sont rouges) et $P(B) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ (la moitié des cartes sont rouge!). On a donc $P_A(B) = P(B)$ et les événements A et B sont indépendants.

2. On remarque ici que $A \subset B$ puisqu'une dame est une figure. Donc $P_A(B) = 1$, et donc comme $P(B) = \frac{12}{32}$, on obtient que $P_A(B) \neq P(B)$. Les événements A et B ne sont pas indépendants.

Corrigé exercice 23

Soit D l'événement "le dé donne un numéro inférieur ou égal à 4",

et soit pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, l'événement R_i "le i^e tirage donne une boule rouge".

- On cherche $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$. Il faut savoir dans quel urne on effectue nos tirages, pour calculer les probabilités. Comme $(D, \overline{D})$ est un s.c.e., d'après la formule des probabilités totales, $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(D)P_D(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(\overline{D})P_{\overline{D}}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$. Puis une fois l'urne choisie, les tirages se font avec remise, donc sont mutuellement indépendants. D'où, $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(D)P_D(R_1)P_D(R_2)P_D(R_3) + P(\overline{D})P_{\overline{D}}(R_1)P_{\overline{D}}(R_2)P_{\overline{D}}(R_3)$. Comme les tirages se font en situation équiprobable, on peut calculer chaque probabilité, d'où : $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{4}{6}(\frac{5}{8})^3 + \frac{2}{6}(\frac{4}{11})^3$.
- On cherche $P_{R_1 \cap R_2 \cap R_3}(D)$. D'après la formule de Bayes,
$$P_{R_1 \cap R_2 \cap R_3}(D) = \frac{P(D)P_D(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)} = \frac{\frac{4}{6}(\frac{5}{8})^3}{\frac{4}{6}(\frac{5}{8})^3 + \frac{2}{6}(\frac{4}{11})^3}$$

Corrigé exercice 25 : partie matricielle

- Attention de bien mémoriser la méthode, pour vous éviter de vous retrouver avec un système horrible On pose

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ et } \boxed{\text{on résout } PX = Y \text{ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.}}$$

$$\text{Or } PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 6z = a \\ y + 3z = b \\ -x - 3y + 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 6z = a \\ y + 3z = b \\ -y + 8z = a + c \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 6z = a \\ y + 3z = b \\ 11z = a + b + c \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Le système est de Cramer, car les 3 pivots sont non-nuls, donc

P est inversible. On finit la résolution pour trouver P^{-1} .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 2b \\ y = \frac{-3}{11}a + \frac{8}{11}b - \frac{3}{11}c \\ z = \frac{1}{11}(a + b + c) \end{cases}$$

On trouve donc $P^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & -22 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (il est intéressant de mettre la fraction devant, pour les calculs suivants).

Trouvons D : or $M = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}M = DP^{-1}$ (par multiplication par P à gauche) $\Leftrightarrow P^{-1}MP = D$.

$$\text{Donc } D = P^{-1}MP = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 6 \\ 0 & 1/12 & 3 \\ 0 & -1/4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Là encore, pour faciliter les calculs de fractions, on aurait pu écrire $M = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et laisser devant votre calcul le $\frac{1}{11} \times \frac{1}{12} \dots$

- Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
Pour $n = 1$, $M = PDP^{-1}$.
Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
Alors $M^{n+1} = M^nM = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Conclure.

Il reste à faire le produit matriciel pour trouver M^n .

$$\text{Comme } D \text{ est diagonale, on a pour } n \in \mathbb{N}^*, D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{12})^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On trouve alors } M^n = \begin{pmatrix} 0 & 2(\frac{1}{12})^n & 6 \\ 0 & (\frac{1}{12})^n & 3 \\ 0 & -3(\frac{1}{12})^n & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 - 6(\frac{1}{12})^n & 6 + 16(\frac{1}{12})^n & 6 - 6(\frac{1}{12})^n \\ 3 - 3(\frac{1}{12})^n & 3 + 8(\frac{1}{12})^n & 3 - 3(\frac{1}{12})^n \\ 2 + 9(\frac{1}{12})^n & 2 - 24(\frac{1}{12})^n & 2 + 9(\frac{1}{12})^n \end{pmatrix} \text{ Ouf!}$$

Corrigé exercice 26

Partie I

- On trouve $A = \frac{1}{3}(J - I)$, donc $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$ conviennent.
- (a) On trouve $J^2 = 4J$. Puis par récurrence : $k = 1$, $4^{k-1}J = 1 \times J = J^1$.
Puis, si on a $J^k = 4^{k-1}J$, alors $J^{k+1} = J^k \times J = 4^{k-1}J \times J = 4^{k-1}J^2 = 4^{k-1} \times 4J = 4^k J$. Conclure.
- (b) D'après la formule du binôme de Newton,
$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^{k-1} (-1)^{n-k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k}$$
$$= \frac{1}{4} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k} - \binom{n}{0} 4^0 (-1)^n \right] = \frac{1}{4} [(4-1)^n - (-1)^n] = \frac{1}{4} (3^n - (-1)^n).$$

- (c) ** Vu l'enchaînement des questions, la méthode la plus "naturelle" était la méthode via le binôme de Newton : maintenant, comme le résultat est dans la question, rien n'empêche le raisonnement par récurrence.
 Rédaction Binôme de Newton : comme I et J commutent, $A^n = (\frac{1}{3}(J - I))^n = (\frac{1}{3})^n (J - I)^n$
 $= (\frac{1}{3})^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k (-I)^{n-k} = (\frac{1}{3})^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k (-1)^{n-k} = (\frac{1}{3})^n [\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^{k-1} J (-1)^{n-k} + \binom{n}{0} J^0 (-1)^n]$ puisque la relation du 2.(a) n'est vraie que pour $k \geq 1$.
 D'où $A^n = (\frac{1}{3})^n [\frac{1}{4}(3^n - (-1)^n)J + (-1)^n I] = \frac{1}{4}(1 - (-\frac{1}{3})^n)J + (-\frac{1}{3})^n I$.
 Rédaction par récurrence :
 Hérité : si $A^n = (-\frac{1}{3})^n I + \frac{1}{4}(1 - (-\frac{1}{3})^n)J$, Alors $A^{n+1} = A \times A^n = \frac{1}{3}(J - I)((-\frac{1}{3})^n I + \frac{1}{4}(1 - (-\frac{1}{3})^n)J)$
 $= \frac{1}{3}[(-\frac{1}{3})^n J + \frac{1}{4}(1 - (-\frac{1}{3})^n)J^2 - (-\frac{1}{3})^n I - \frac{1}{4}(1 - (-\frac{1}{3})^n)J] = \frac{1}{3}[(-\frac{1}{3})^n J + (1 - (-\frac{1}{3})^n)J - (-\frac{1}{3})^n I - \frac{1}{4}(1 - (-\frac{1}{3})^n)J]$
 $= \frac{1}{3}[J - \frac{1}{4}(1 - (-\frac{1}{3})^n)J] - \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^n I = J[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n+1}] + (-\frac{1}{3})^{n+1} I$ d'où le résultat ...
 (d) La première ligne de A^n est donc $[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n]$

Partie 2.

1. A l'instant 1, le mobile se positionne sur l'un des 4 sommets avec équiprobabilité donc $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = \frac{1}{4}$.
2. D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e., $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$,
 $a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) + P(D_n)P_{D_n}(A_{n+1}) = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3} + d_n \times \frac{1}{3}$.
 De même, $b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 0 + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3}d_n$, $c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + 0 + \frac{1}{3}d_n$ et $d_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + b_n + c_n) + 0$. Il reste à faire le produit matriciel AX_n pour retomber sur X_{n+1} .
3. $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de matrices de raison A et de premier terme X_1 , donc pour tout $n \geq 1$, $X_n = A^{n-1}X_1$.
4. Il reste alors à utiliser l'expression de A^{n-1} obtenue au 2. (d) (en $n-1$) puis faire le produit matriciel avec
 $X_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour obtenir les différentes probabilités. Par exemple,
 $a_n = \frac{1}{4}[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}] = \frac{1}{4}[1 + \frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1} - 3\frac{1}{4}(\frac{1}{3})^{n-1}] = \frac{1}{4}!!$
 De même, on a $b_n = c_n = d_n = \frac{1}{4}$ (tout se fait au hasard ... donc finalement à chaque instant, on est encore dans ce choix équiprobable ...)

Corrigé exercice 27

1. Attention de bien introduire des événements avant d'appliquer la formule des probabilités totales ! (surtout que comme le résultat est dans la question, il faut d'autant plus justifier).
 Posons R_n (resp. V_n) l'événement "le feu est rouge (resp. vert) à l'instant n ".
 Alors d'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. de probabilités non-nulles (R_n, V_n) :
 $P(R_{n+1}) = P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(R_{n+1})$ d'où $r_{n+1} = r_n \times (1-p) + v_n \times q$ puisque d'après l'énoncé, $P_{R_n}(V_{n+1}) = p$ et $P_{V_n}(R_{n+1}) = q$.
 De même pour v_{n+1} .
2. $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ convient et pour la deuxième partie faire une récurrence rapide (ou poser $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et arguer que la suite (X_n) est une suite de matrices géométrique de raison A et de premier terme $X_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ ).
3. De la première ligne, on obtient $B = I - C$, d'où L_2 devient : $I + (-p-q)C = A$
 soit encore $C = \frac{1}{p+q}(I - A) = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix}$. On revient alors à $B : B = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}$.
4. Faire les calculs matriciels : penser à laisser les constantes devant Par exemple : $B^2 = \frac{1}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}$
 $= \frac{1}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} q^2 + qp & q^2 + qp \\ pq + p^2 & pq + p^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} q(q+p) & q(q+p) \\ p(q+p) & p(q+p) \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} = B...$
5. Comme B et C commutent, d'après la formule du binôme de Newton :
 $A^n = (B + (1-p-q)C)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (1-p-q)^{n-k} C^{n-k} = \dots + \dots + \dots + \dots$ (écrire quelques termes !)
 Or d'après 4. $BC = 0$ donc pour tout $1 \leq k \leq n-1$, $B^k C^{n-k} = 0$, puisqu'alors $k \geq 1$ et $n-k \geq 1$.
 Finalement, il ne reste que deux termes dans la somme : le premier et le dernier (seuls termes où il n'y a pas simultanément du B et du C !).
 $A^n = \binom{n}{0} B^0 (1-p-q)^n C^n + \binom{n}{n} B^n (1-p-q)^0 C^0 = (1-p-q)^n C^n + B^n$.
 Enfin, par une récurrence rapide, on déduit du 4. que pour tout $k \geq 1$, $B^k = B$ et $C^k = C$ d'où finalement,
 $A^n = (1-p-q)^n C + B$ pour tout entier $n \geq 1$.
 $A^n = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} (1-p-q)^n p + q & -(1-p-q)^n q + q \\ -(1-p-q)^n p + p & (1-p-q)^n q + p \end{pmatrix}$

6. Il reste à faire le produit matriciel $A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ pour obtenir la matrice $\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

On trouve $r_n = \dots \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p+q}(qr_0 + qv_0) = \frac{q}{p+q}$ puisque $r_0 + v_0 = 1$.

Penser à justifier que $|1 - p - q| < 1$ avant de passer à la limite : $(1 - p - q)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Justification : $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$ donc $0 < p + q < 2$ et $0 > -(p + q) > -2$ soit encore $1 > 1 - p - q > -1$. De même pour v_n .

Remarque : l'énoncé vous a guidé dans une méthode matricielle ... mais finalement, si on remarquait dès le début que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n + v_n = 1$, on pouvait réécrire la question 1. ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = (1 - p)r_n + (1 - r_n)q = (1 - p - q)r_n + q$. Autrement dit, (r_n) est une suite arithmético-géométrique. On aurait ainsi pu trouver sa forme explicite je vous laisse vérifier que vous obtenez bien la même chose!!