Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Espaces probabilisés infinis

Corrigé de l'exercice 1

La suite des intervalles (A_n) est décroissante au sens de l'inclusion, donc la réunion finie donne le premier, et l'intersection finie donne le dernier)

$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = [-1, 1]$ et $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$.

Donc $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup .... = [-1, 1]$ et $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \cap .... = \{0\}$. En effet, 0 est dans tous les A_n, mais si on prend $\epsilon > 0$ (par exemple), à partir d'un certain rang, $\frac{1}{n} < \epsilon$ donc ϵ ne sera plus dans les A_n : bref, il n'y a que 0.

$\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k = [\frac{1}{n}, +\infty[$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k = [1, +\infty[$ (remarquer que la suite des intervalles (B_n) est croissante au sens de l'inclusion, donc la réunion est le dernier, et l'intersection le premier)

$\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} B_k =]0, +\infty[$ (attention de bien penser à ouvrir en 0, car 0 n'est dans aucun B_n) et $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} B_k = [1, +\infty[$.

$\bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k = [-1, +\infty[$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} C_k = [-\frac{1}{n}, +\infty[$ (remarquer que la suite des intervalles (C_n) est décroissante au sens de l'inclusion, donc la réunion est le premier, et l'intersection le dernier)

$\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} C_k = [-1, +\infty[$ et $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} C_k = [0, +\infty[$ (ici le 0 est inclus, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \in C_n$, donc on a bien $0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$)

Corrigé de l'exercice 2

Les justifications ont été validées en cours lors des autres exercices.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = F_1 \cap ... \cap F_n$ d'où .... $P(A_n) = (1-p)^n$. Par ailleurs, $B = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ car B se réalise ssi tous les A_n se réalisent, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} = A_n \cap F_{n+1} \subset A_n$.

D'après le théorème de limite monotone, on en déduit $P(B) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(B_n) = 0$ car $|1-p| < 1$.

Corrigé de l'exercice 4 : variante

Tout le démarrage est identique à la question 1 : introduction des événements élémentaires, puis description de A_n.
(pour rappel : $A_n = (P_1 \cap ... \cap P_n) \cup (P_1 \cap ... \cap P_{n-1} \cap F_n) \cup (P_1 \cap ... \cap P_{n-2} \cap F_{n-1} \cap F_n) \cup ... \cup (F_1 \cap ... \cap F_n))$.

En passant à la proba, (justifier réunion de $(n+1)$ événements 2 à 2 incompatibles, mutuelle indépendance des lancers) on obtient donc $P(A_n) = p^n + (1-p)p^{n-1} + (1-p)^2p^{n-2} + ... + (1-p)^{n-1}p + (1-p)^n$.

L'étape clé est d'écrire $P(A_n)$ sous la forme d'une somme, afin de pouvoir ensuite la calculer.

On écrit : $P(A_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} (1-p)^k p^{n-k}$. Il reste maintenant à se ramener à une somme géométrique (pas de coefficient binomial, donc pas de binôme de Newton!!).

Or $P(A_n) = p^n \sum\limits_{k=0}^{n} (1-p)^k p^{-k}$ et comme $(1-p)^k p^{-k} = \frac{(1-p)^k}{p^k} = (\frac{1-p}{p})^k$ on obtient

$P(A_n) = p^n \sum\limits_{k=0}^{n} (\frac{1-p}{p})^k = p^n \frac{1-(\frac{1-p}{p})^{n+1}}{1-\frac{1-p}{p}} = \frac{p^n(1-\frac{(1-p)^{n+1}}{p^{n+1}})}{\frac{p-(1-p)}{p}} = \frac{p^{n+1}(1-\frac{(1-p)^{n+1}}{p^{n+1}})}{2p-1} = \frac{p^{n+1}-(1-p)^{n+1}}{2p-1}$.

Remarque : au moment d'utiliser la formule de la somme géométrique, il fallait réaliser que $\frac{1-p}{p} \neq 1$ puisque $p \neq \frac{1}{2}$.

La conclusion s'obtient comme dans la question 1. : en effet, on cherche $P(A)$, avec $A = \bigcap\limits_{n=2}^{+\infty} A_n$ et comme $A_{n+1} \subset A_n$ (faire une phrase), d'après le théorème de limite monotone, $P(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n) = 0$ puisque comme $0 < p < 1$, $p^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(1-p)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Corrigé de l'exercice 6 :

1. D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. de probabilités non nulles (A_n, B_n, C_n),
   $P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$ d'où
   $a_{n+1} = 0 + \frac{1}{2}b_n + 0$.
   De même, $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 0 + 0$ et $c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n$.
   On remarque également, que comme la puce est à l'instant 0 en A : $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$.
2. D'après 1., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ donc la suite $(a_n + b_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $a_0 + b_0 = 1 + 0 = 1$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = (\frac{1}{2})^n$.
   Puis comme (A_n, B_n, C_n) forme un s.c.e., $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - (\frac{1}{2})^n$.
   bonus :
   méthode 1 : Astuce!! regarder la suite $(a_n - b_n)$ qui est également géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}a_n = -\frac{1}{2}(a_n - b_n)$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n - b_n = (-\frac{1}{2})^n$. Et finalement, $a_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \frac{1}{2}(a_n - b_n) = (\frac{1}{2})^{n+1} - (-\frac{1}{2})^{n+1}$, et $b_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \frac{1}{2}(a_n - b_n) = (\frac{1}{2})^{n+1} + (-\frac{1}{2})^{n+1}$.
   méthode 2. : d'après 1., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$
   donc la suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Equation caractéristique : $x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{4} = 0$. Deux racines :

$\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Donc on sait qu'il existe un unique couple (λ, mu) de réels tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lambda(\frac{1}{2})^n + \mu(-\frac{1}{2})^n$.
Il reste alors à résoudre le système correspondant, avec $a_0 = 1$ et $a_1 = \frac{1}{2}b_0 = 0$. On trouve $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.
De même pour b (récurrence linéaire d'ordre 2, de même équation ... mais système différent puisque $b_0 = 0$ et $b_1 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}$)

3. On remarque que la puce atteint la case C en un nombre fini d'étapes ssi l'un des événements C_n se réalise : $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$. De plus, le point C est absorbant : si la puce est en C à l'instant n, elle y sera encore à l'instant $n+1$ d'où $C_n \subset C_{n+1}$.

   D'après le théorème de limite monotone, $P(E) = P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1$ puisque $|\frac{1}{2}| < 1$. Donc l'événement E est presque sûr.

4. Soit D_n l'événement "la puce est en C pour la première fois à l'instant n".
   Alors $P_{C_{n+1}}(D_n) = \frac{P(C_{n+1}\cap D_n)}{P(C_{n+1})} = \frac{P(D_n)}{P(C_{n+1})}$ puisque $D_n \subset C_{n+1}$ (C point absorbant).
   Comme $P(C_{n+1}) = 1 - (\frac{1}{2})^{n+1}$, il reste à calculer $P(D_n)$.

   or $D_n = \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap .. \cap \overline{C_{n-1}} \cap C_n$ mais cette description n'est pas assez précise pour que le calcul des probabilités soit rigoureux, puisque les probabilités connues sont celles de passer de A à B ou C etc.
   Mais vu l'expérience (le point C est absorbant),
   $D_n = \overline{C_{n-1}} \cap C_n = (A_{n-1} \cup B_{n-1}) \cap C_n = (A_{n-1} \cap C_n) \cup (B_{n-1} \cap C_n)$ réunion de 2 événements incompatibles d'où
   $P(D_n) = P(A_{n-1})P_{A_{n-1}}(C_n) + P(B_{n-1})P_{B_{n-1}}(C_n) = a_{n-1} \times \frac{1}{2} + b_{n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^n$
   d'après 2.

   Variante : description complète (simple dans l'idée, mais embêtante dans l'écriture, car il faut distinguer n pair de n impair pour savoir si on est en A ou en B). Ne pas oublier qu'à l'instant 0, la puce part de A.
   si n pair, $D_n = A_0 \cap B_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-2} \cap B_{n-1} \cap C_n$ et d'après la formule des probabilités composées :
   $P(D_n) = P(A_0)P_{A_0}(B_1)P_{B_1}P(A_2)...P_{A_0 \cap B_1 \cap ... \cap B_{n-1}}(C_n) = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times ... \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^n$
   et si n impair, $D_n = (A_0 \cap)\, B_1 \cap A_2 \cap ... \cap B_{n-2} \cap A_{n-1} \cap C_n]$ et de même, $P(D_n) = (\frac{1}{2})^n$.

Corrigé de l'exercice 9

1. En écrivant comme d'habitude $B_n = P_1 \cap ... \cap P_n$, par indépendance des lancers, $P(B_n) = (\frac{1}{2})^n$ puisque la pièce est équilibrée.
   Or $A_n = \overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap ... \cap \overline{B}_n$ donc d'après la FPC (à écrire) $P(A_n) = \prod_{k=1}^{n} (1 - (\frac{1}{2})^k)$.

2. Alors $\ln(P(A_n)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 - (\frac{1}{2})^k)$ est la somme partielle de la série de terme général $\ln(1 - (\frac{1}{2})^n)$.
   Comme $(\frac{1}{2})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\ln(1 - (\frac{1}{2})^n) \sim -(\frac{1}{2})^n$ qui est une CL du terme général d'une série géométrique convergente puisque $|\frac{1}{2}| < 1$.
   D'après le critère d'équivalence appliqué à des séries de termes négatifs, on en déduit que la série qui nous intéresse est bien convergente.

3. Posons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - (\frac{1}{2})^n) \in \mathbb{R}$. Alors $\ln(P(A_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, donc $P(A_n) = e^{\ln(P(A_n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^S \neq 0$.
   Attention, cela ne suffit pas : il faut encore justifier que la limite de $P(A_n)$ est la probabilité cherchée ! !
   Posons A l'événement "le joueur perd". Alors $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ puisque le joueur perd si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il ne gagne pas avant le n^{ie} tour. De plus les (A_n) forment une suite décroissante d'événements puisque $A_{n+1} \subset A_n$: en effet $A_{n+1} = A_n \cap \overline{B}_{n+1}$.
   Donc d'après le théorème de limite monotone, $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = e^S \neq 0$.

Corrigé de l'exercice 10

(a) D'après la conséquence du théorème de limite monotone, $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$ (cf cours pour l'idée de preuve). D'où $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} (1 - P(\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k})) = \lim_{n\to+\infty} (1 - P(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k)) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k)$ car 1 est une constante. D'où le résultat, en utilisant la mutuelle indépendance des événements (A_n) (qui entraine la mutuelle indépendance des événements $(\overline{A}_n)$).

(b) La question 1. permet d'obtenir $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
    En effet $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = 1 \Leftrightarrow \prod_{k=0}^{n} P(\overline{A_k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \ln(\prod_{k=0}^{n} P(\overline{A_k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ (on peut bien appliquer le ln, car tous les termes du produit sont > 0 par hyp)
    $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \ln(P(\overline{A_k})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$
    $\Leftrightarrow$ la série $\sum_{n\geq} \ln(P(\overline{A_n}))$ diverge.
    en effet, le sens direct est évident (la somme partielle diverge vers $-\infty$, donc elle diverge, donc la série diverge).

Pour le sens réciproque, il faut donner un argument supplémentaire (car la divergence ne veut pas toujours dire dv vers $-\infty$) : la série est à termes négatifs donc c'est le cas (cf cours chapitre séries, section séries à termes positifs)).

Il reste à étudier $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ càd à relier les séries $\sum\limits_{n\geq} \ln(1-P(A_n))$ et $\sum\limits_{n\geq} P(A_n)$.
Si on a $P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\ln(1-P(A_n)) \sim -P(A_n)$ donc d'après le critère d'équivalence, on sait que les séries sont de même nature et l'équivalence est justifiée.
Dans le cas contraire, les séries divergent grossièrement toutes les deux (puisque leur terme général ne tend pas vers 0) donc le résultat est immédiat.