

Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille : Ev de dimension finie

Corrigé de l'exercice 1, question 2 : Méthode : se ramener à la question clé du premier chapitre "mq G sev de ... et en trouver une base".

Or $G = \{(0, z, z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, 1, 1))$ donc G sev de $\mathbb{R}^3$ et la famille $\{(0, 1, 1)\}$ est génératrice de G . Comme elle ne contient qu'un seul vecteur non-nul, elle est libre, donc est une base de G .

On en déduit que $\dim(G) = 1$.

Corrigé de l'exercice 5 :

Les deux vecteurs de la famille A sont libre (à vérifier) : d'après le théorème de la base incomplète, on peut donc la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

Concrètement, vu que la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3, il faut ajouter un vecteur "judicieux" à cette famille A (tel que la nouvelle famille soit encore libre).

On pioche ce vecteur dans la base canonique : par exemple $(0, 0, 1)$.

Il reste à montrer que la famille $A' = ((1, 1, 1), (-1, 2, 0), (0, 0, 1))$ est libre, car alors étant de bon cardinal, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour la famille B : elle est liée car elle contient 4 vecteurs. Donc trouver une relation de liaison ! Supprimer le redondant. La nouvelle famille en contiendra 3, et sera alors une base de $\mathbb{R}^3$, car elle sera libre (à vérifier).

Corrigé de l'exercice 6 :

Pour trouver la dimension de E , il faut trouver une base de E .

Méthode : opérations sur le Vect, pour simplifier la famille génératrice de départ et supprimer les redondants (deux vecteurs).

Il reste à vérifier que les deux derniers vecteurs forment une famille libre.

On obtient $\dim(E) = 2$.

Même démarche pour le deuxième exemple : soit on simplifie pour trouver $E = \text{Vect}(1, x^2, x^3)$ et conclure que $\dim(E) = 3$ (car la famille $(1, x^2, x^3)$ est libre comme sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$). Soit on montre directement que la famille de départ est libre, donc forme une base de E , d'où $\dim(E) = 3$.

Corrigé de l'exercice 7 :

$$\begin{aligned} F &= \{x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{2x}, a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \mapsto ax^2e^{2x} + bxe^{2x} + ce^{2x}, a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(x \mapsto x^2e^{2x}, x \mapsto xe^{2x}, x \mapsto e^{2x}). \end{aligned}$$

En particulier, F est un sev de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Il reste à vérifier que cette famille de 3 fonctions est bien libre : poser a, b, c trois réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(ax^2 + bx + c)e^{2x} = 0$.

Alors en regardant pour $x = 0$, on en déduit que $c = 0$.

Puis en regardant pour $x = 1$ et $x = -1$ (par exemple), on trouve $a = b = 0$.

On peut alors conclure que la dimension de F_α est égale à 4.

Corrigé de l'exercice 12 :

1. Par définition de E , on a $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Posons alors w la suite nulle : donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 0$. Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = 0 = 3w_{n+1} - 2w_n$.

On en déduit que $w \in E$ et $E \neq \emptyset$.

Soit maintenant, $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda u_{n+2} + w_{n+2} = \lambda(3u_{n+1} - 2u_n) + (3v_{n+1} - 2v_n)$

par hypothèse sur u et v

$$= 3(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) - 2(\lambda u_n + v_n). \text{ Donc } \lambda u + v \in E.$$

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. **

Linéarité de φ : soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(\lambda u + v) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1) = \lambda(u_0, u_1) + (v_0, v_1) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$.

Montrons que φ est injective c-à-d que $\text{Ker}(\varphi) = 0$: soit u une suite de E telle que $\varphi(u) = (0, 0)$. Alors $u_0 = 0 = u_1$.

De plus comme $u \in E$, $u_2 = 3u_1 - 2u_0 = 0$, $u_3 = 3u_2 - u_1 = 0 \dots$ etc. Par itération, on aura bien ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Donc $\text{Ker}(\varphi) \subset \{(0)_{n \in \mathbb{N}}\}$. L'autre inclusion est évidente, d'où l'injectivité.

Montrons que φ est surjective.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrons qu'il existe une suite $u \in E$ telle que $\varphi(u) = (a, b)$. On va la construire par récurrence.

On commence par poser $u_0 = a$, puis $u_1 = a$ (pour que $\varphi(u) = (a, b)$).

On définit alors par récurrence les termes suivants : $u_2 = 3u_1 - 2u_0$, $u_3 = 3u_2 - u_1 \dots$. Cette suite va bien exister (puisque chaque terme est ainsi bien défini) ; par construction c'est une suite de E . Et par construction également $\varphi(u) = (a, b)$. Donc on a la surjectivité de φ .

remarque : on aurait pu montrer la bijectivité en une seule étape, en démontrant que la suite qui convenait dans la surjectivité était bien unique par construction. On aurait bien ainsi montré que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existait une unique suite $u \in E$ qui convient : c'est la définition de la bijectivité.

3. Comme φ est un isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^2$, on en déduit $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.
4. Soit u une suite géométrique non-nulle de raison q . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$, avec $u_0 \neq 0$, puisque la suite est non-nulle.
 $u \in E \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^{n+2}u_0 = 3q^{n+1}u_0 - 2q^n u_0$
 $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_0 q^n (q^2 - 3q + 2) = 0 \Leftrightarrow q^2 - 3q + 2 = 0$
 Attention, cette dernière équivalence doit être justifiée, car on "perd" le pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $\Rightarrow$ il suffit de prendre $n = 0$, puisque le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on sait $u_0 \neq 0$
 $\Leftarrow$ est évident !
 Bref : $u \in E$ ssi q est solution du trinôme $x^2 = 3x - 2$
 (vous commencez à vous rappeler le théorème que l'on doit redémontrer dans ce cas particulier ?
 On a ainsi fait apparaître l'équation caractéristique !).
 $\Delta = 1$; deux racines 1 et 2.
 Finalement, on en déduit que les suites $(u_0 \times 1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_0 \times 2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites de E .
5. Posons $v = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$. On sait que $v, w \in E$ d'après 4.
 De plus la famille (v, w) est libre : en effet, soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $av + bw = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a + 2^n b = 0$.
 En particulier, pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$ d'où $a = b = 0$.
 Donc la famille (v, w) de E est libre et de bon cardinal ; donc c'est une base de E .
 Autrement dit, pour toute suite u de E , il existera un unique couple (λ, μ) de réels tels que : $u = \lambda v + \mu w$
 c'est-à-dire tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda \times 1 + \mu 2^n$.
 Ça y est ! On a bien retrouvé la forme explicite donnée par le théorème du chapitre suites.

Corrigé de l'exercice 14 :

1. $E \subset \mathbb{R}_4[x]$.
 Notons $Q = 0_{\mathbb{R}[x]}$ le polynôme nul : alors $Q \in \mathbb{R}_4[x]$, et $Q(4) = 0 = Q(0)$ donc $Q \in E$, et E est non vide.
 Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0$ et $(\lambda P + Q)(4) = \lambda P(4) + Q(4) = 0$.
 Donc $\lambda P + Q \in E$.
 E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.
2. a) si $P \in \mathbb{R}_2[x]$, alors $\deg \phi(P) = \deg P + \deg W \leq 4$ et donc $\phi(P) \in \mathbb{R}_4[x]$.
 De plus $\phi(P)(0) = W(0)P(0) = 0$ et $\phi(P)(4) = W(4)P(4) = 0$ donc $\phi(P) \in E$.
 On peut bien définir $\phi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow E$.
 b) Montrons que ϕ est linéaire : pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$, on a $\phi(\lambda P + Q) = W(\lambda P + Q) = \lambda WP + WQ = \lambda \phi(P) + \phi(Q)$.
 Il reste à montrer la bijectivité :
 Montrons que $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$.
 Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. Alors $P \in \text{Ker}(\phi) \Leftrightarrow WP = 0_{\mathbb{R}[x]} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x(x-4)(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow$

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^4 + (b-4a)x^3 + (c-4b)x^2 - 4cx = 0 \text{ d'où par unicité de l'écriture } \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b - 4a = 0 \\ c - 4b = 0 \\ -4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

 D'où le seul polynôme du noyau est $P = 0x^2 + 0x + 0 = 0_{\mathbb{R}[x]}$.
 Ou méthode courte : Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$. Alors $P \in \text{Ker}(\phi) \Leftrightarrow WP = 0$. Comme $W \neq 0_{\mathbb{R}[x]}$, par propriété d'intégrité (cf chapitre polynôme), on en déduit $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$.
 Ceci prouve donc que $\text{Ker}(\phi) = \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$ et que ϕ est injectif.
- Montrons que $\text{Im}(\phi) = E$ c-à-d que ϕ est surjectif.
 Première idée ; $\text{Im}(\phi) = \text{Vect}(\phi(1), \phi(x), \phi(x^2)) = \dots$ mais problème pour reconnaître E puisque l'on ne connaît pas de famille génératrice de E !
 On recommence avec la définition : Soit $Q \in E$. Montrons qu'il existe $P \in \mathbb{R}_2[x]$, tel que $\phi(P) = Q$.
 $Q \in E$ implique $Q(0) = 0 = Q(4)$. Donc 0 et 4 sont deux racines distinctes de Q , donc $x(x-4)$ divise Q : il existe $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $Q = WP$.
 En considérant les degrés, on trouve $\deg(P) + \deg(W) = \deg(Q) \leq 4$ d'où $\deg(P) \leq 2$ et $P \in \mathbb{R}_2[x]$.
 On a bien trouvé $P \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $\phi(P) = Q$.
 Ainsi ϕ est surjectif, ce qui achève de prouver que ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ sur E .
3. De la question précédente, on déduit (théorème 1 section I3 de ce chapitre) que E est de même dimension que $\mathbb{R}_2[x]$ et donc $\dim E = 3$.
 De plus, ϕ étant un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ dans E , l'image par ϕ d'une base de $\mathbb{R}_2[x]$ est une base de E (dernier théorème du chapitre Applications linéaires), et donc $(\phi(1), \phi(x), \phi(x^2)) = (Wx, Wx, Wx^2) = (x(x-4), x^2(x-4), x^3(x-4))$ est une base de E .
4. (a) Soit $Q \in \mathbb{R}_2[x]$, alors Q s'écrit : $Q : x \mapsto ax^2 + bx + c$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c \in \mathbb{R}_2[x]$, et par somme, $\Delta(Q) \in \mathbb{R}_2[x]$.
 Si $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Delta(\lambda P + Q)(x) = \lambda P(x+1) + Q(x+1) - (\lambda P(x) + Q(x)) = \lambda(P(x+1) - P(x)) + (Q(x+1) - Q(x)) = \lambda \Delta(P)(x) + \Delta(Q)(x)$. D'où $\Delta(\lambda P + Q) = \lambda \Delta(P) + \Delta(Q)$.
 Donc Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

- (b) Soit $Q = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Delta(Q)(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) = a(x^2 + 2x + 1) + bx + b + c - ax^2 - bx - c = 2ax + (a+b)$. Si $\deg Q = 2 \Leftrightarrow a \neq 0$, alors $\deg \Delta(Q) = 1$. Si $\deg Q = 1 \Leftrightarrow a = 0, b \neq 0$, alors $\deg \Delta(Q) = 0$. Si $\deg Q \leq 0 \Leftrightarrow a = b = 0$, alors $\Delta(Q) = 0 \Leftrightarrow \deg \Delta(Q) = -\infty$.
- (c) Soit par la méthode standard : poser $Q = ax^2 + bx + c$, alors $\Delta(Q) = 0 \Leftrightarrow \dots$ (identifier les coefficients). Soit par la question précédente : on a $\Delta(Q) = 0 \Leftrightarrow \deg Q \leq 0$. Donc $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[x]$, l'ensemble des polynômes constants.
De même pour l'image, soit par $\text{Im}(\Delta) = \text{Vect}(\Delta(X^0), \Delta(X^1), \Delta(X^2)) = \text{Vect}(0, 1, 2x+1) = \text{Vect}(1, x) = \mathbb{R}_1[X]$. Soit par la question précédente : on a prouvé que $\text{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_1[X]$. Mais par le théorème du rang, $\dim \text{Im}(\Delta) = \dim \mathbb{R}_2[x] - \dim \text{Ker}(\Delta) = 3 - 1 = 2 = \dim \mathbb{R}_1[x]$. On en déduit que $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_1[x]$.
- (d) Nous avons prouvé en 4.b que $\deg \Delta(Q) \leq \deg Q - 1$.
Donc pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[x]$, $\deg(\Delta \circ \Delta \circ \Delta)(Q) \leq \deg Q - 3 \leq -1$.
Et donc pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[x]$, $(\Delta \circ \Delta \circ \Delta)(Q) = 0$. Ceci prouve bien que l'endomorphisme Δ^3 est nul.

Corrigé de l'exercice 16

1. Soit $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$ d'où $f(\lambda \vec{x}_1 + \vec{x}_2) = ((\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2), (\lambda y_1 + y_2) + 2(\lambda z_1 + z_2)) = ((\lambda x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + y_2), (\lambda y_1 + 2\lambda z_1) + (y_2 + 2z_2)) = ((\lambda x_1 + \lambda y_1), (\lambda y_1 + 2\lambda z_1)) + ((x_2 + y_2), (y_2 + 2z_2)) = \lambda(x_1 + y_1, y_1 + 2z_1) + f(\vec{x}_2) = \lambda f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$.
Donc f est linéaire.

J'en profite pour vous rappeler que si vous avez tendance à vous perdre, n'hésitez pas, en parallèle, à partir de $\lambda f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$, et faire en sorte que les deux expressions se rejoignent !

Puis $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f((1, 0, 0)), f((0, 1, 0)), f((0, 0, 1))) = \text{Vect}((1, 0), (1, 1), (0, 2)) = \text{Vect}((1, 0), (0, 1))$ par les opérations sur le vect (deuxième vecteur redondant, et le dernier $\times \frac{1}{2}$).

2. Par définition du noyau, si $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{0}$.
Donc il suffit de calculer $f((2, -2, 1)) = (2 - 2, -2 + 2 \cdot 1) = (0, 0)$. Donc $(2, -2, 1) \in \text{Ker}(f)$.

Appliquons maintenant le théorème du rang à f :

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

(bien réaliser que c'est la dimension de l'espace de départ qui intervient dans le théorème du rang, et non la dimension de l'espace d'arrivée !)

Comme $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Conclusion partielle : $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$, càd $\text{Ker}(f)$ est une droite vectorielle.

Or $\{(2, -2, 1)\}$ est une famille libre de $\text{Ker}(f)$ (en effet, c'est un vecteur de $\text{Ker}(f)$ non-nul, donc comme il est tout seul, il en devient une famille libre de $\text{Ker}(f)$), de cardinal 1, donc de bon cardinal puisque $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$.
On en déduit que cette famille est une base de $\text{Ker}(f)$.

En particulier elle est génératrice de $\text{Ker}(f)$: d'où $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((2, -2, 1))$.

Corrigé de l'exercice 17 :

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$. Alors $\deg(P) \leq 2$, $\deg(P') \leq 1$ et $\deg((x^2 - 1)P') = 2 + \deg(P') \leq 3$ d'où $f(P) \in \mathbb{R}_3[x]$.
Linéarité : soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\lambda P + Q)(x) = (x^2 - 1)(\lambda P + Q)'(x) = (x^2 - 1)(\lambda P'(x) + Q'(x)) = \lambda f(P)(x) + f(Q)(x)$ par linéarité de la dérivation. D'où $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.
2. Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. $P \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2 - 1)(2ax + b) = 0$
 $\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ $2ax^3 + bx^2 - 2ax - b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P = c$. Donc $\text{Ker}(f) = \{P = c, c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1)$.

En particulier, comme le polynôme 1 est un vecteur non-nul, $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$, et donc d'après le théorème du rang,

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[x]) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2. \text{ (attention de bien prendre l'espace de départ !)}$$

Il reste à déterminer l'image :

$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(x), f(x^2)) = \text{Vect}(0, x^2 - 1, 2x^3 - 2x) = \text{Vect}(x^2 - 1, 2x^3 - 2x)$. Donc $(x^2 - 1, 2x^3 - 2x)$ est une base de $\text{Im}(f)$, soit en arguant que cette famille est de bon cardinal, soit en remarquant que les polynômes sont non-nuls et de degrés deux à deux distincts donc que la famille est libre.

Corrigé de l'exercice 18 :

1. Linéarité : soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Alors $g(\lambda P + Q) = (x^2 - 1)(\lambda P + Q)' - (2x + 1)(\lambda P + Q)$ et par linéarité de la dérivation, $= (x^2 - 1)(\lambda P' + Q') - (2x + 1)(\lambda P + Q) = \dots = \lambda g(P) + g(Q)$.

Il reste à vérifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, $g(P) \in \mathbb{R}_2[x]$.

Attention, ici, les formules sur les degrés ne marchent pas, car $\deg(P) \leq 2 \Rightarrow \deg((2x+1)P) \leq 3$ et de même pour l'autre terme. Il faut donc visualiser le télescopage : soit $P = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$

Alors $g(P) = (x^2 - 1)(2ax + b) - (2x + 1)(ax^2 + bx + c) = 0 \times x^3 + (-b - a)x^2 + (-2a - b - 2c)x + (-b - c) \in \mathbb{R}_2[x]$.
Conclure

2. Point méthode pour trouver le rang d'une application linéaire g :

1. soit on détermine $Im(g)$, pour en trouver une base et obtenir la dimension de $Im(g)$ (c'est-à-dire le rang de g).
2. soit on détermine $Ker(g)$ pour en trouver une base et la dimension de $Ker(g)$: on obtient alors le rang de g à l'aide du théorème du rang.

Ici les deux méthodes sont possibles !

Méthode 1 : $Im(g) = Vect(g(1), g(x), g(x^2)) = Vect(-2x-1, -x^2-x-1, -2x-x^2) Vect(1+2x, 1+x+x^2, 2x+x^2)$
La famille de polynômes $(1+2x, 1+x+x^2, 2x+x^2)$ est-elle libre ? si vous le pensez ... parter dans cette direction.
Si vous n'en savez rien, faire quelques opérations sur le vect pour voir mieux : $= Vect(1+2x, 1+x+x^2, x-1)(\vec{e}_3 - \vec{e}_2) = Vect(3, 1+x+x^2, x-1)$: on trouve une famille de 3 polynômes non-nuls de degrés 2 à 2 distincts donc famille libre donc base de $Im(g)$ et $rg(g) = 3$.

Méthode 2 : Soit $P = ax^2 + bx + c$. Alors, d'après 1. $P \in Ker(g) \Leftrightarrow (-b-a)x^2 + (-2a-b-2c)x + (-b-c) = 0_{\mathbb{R}[x]}$

et donc par identification des coefficients $\Leftrightarrow \begin{cases} -a-b & = 0 \\ -2a-b-2c & = 0 \\ -b-c & = 0 \end{cases} \dots \Leftrightarrow a=b=c=0$ (faire la méthode du pivot).

Donc $Ker(g) = \{0\}$, $\dim(Ker(g)) = 0$ et d'après le théorème du rang $\dim(Im(g)) = \dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$.

Dans tous les cas, réaliser que l'on en déduit que g est bijective ! En effet, avec la méthode 2, on avait g injective, donc (endomorphisme en dimension finie) g est bijective (dernier théorème du chapitre).

Avec la méthode 1, réaliser que $rg(g) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$ donne g surjective (avant dernier théorème du chapitre) donc (dernier th du chapitre) g bijective.

Conclusion : g est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

Corrigé de l'exercice 19 :

Pour ceux qui se perdent avec la lettre n , vous pouvez commencer par faire l'exercice "pour aller plus loin" dans le travail libre DM 10 de l'année en cours (2022-23), qui est le cas particulier $n = 3$.

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f(\lambda P + Q) = (\lambda P(0) + Q(0), \lambda P(1) + Q(1), \dots, \lambda P(n) + Q(n))$
 $= \lambda(P(0), P(1), \dots, P(n)) + (Q(0), Q(1), \dots, Q(n)) = \lambda f(P) + f(Q)$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$: $\deg(P) \leq n$. $P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow (P(0), P(1), \dots, P(n)) = (0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow 0, 1, \dots, n$ sont des racines de $P \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}_n[x]}$, puisque P admet au moins $n+1$ racines distinctes.
En particulier f est injective.
2. Comme $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, on en déduit (dernier th du chapitre) que f est bijective (sinon, redémontrer via le théorème du rang que f est surjective !). Donc par définition de la bijection, pour tout $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\exists ! P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $f(P) = A$
càd tel que $(P(0), P(1), \dots, P(n)) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$.
3. Existence et unicité des L_j : Pour L_0 : c'est la question précédente appliquée à $A_0 = (1, 0, \dots, 0)$.
Pour L_1 : avec $A_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ et pour L_j , avec $A_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où $a_j = 1$ et les autres $a_k = 0$.

La famille $\mathcal{B}$ est de bon cardinal (à savoir $n+1$) : il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

Soit $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 L_0(x) + \lambda_1 L_1(x) + \dots + \lambda_n L_n(x) = 0$ (*).

En regardant (*) en $x = 0$, on obtient $\lambda_0 = 0$, puisque $L_0(0) = 1$ et pour $k \geq 1$, $L_k(0) = 0$.

Plus généralement, pour $x = j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on obtient $0 + \lambda_j \times 1 + 0 = 0$ d'où $\lambda_j = 0$.

La famille est libre donc est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Variante : on remarque que $A_0 = f(L_0) = (1, 0, \dots, 0)$, $A_1 = f(L_1) = (0, 1, \dots, 0)$... et $A_n = f(L_n) = (0, \dots, 0, 1)$.
Donc la famille $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ donc est une base. Donc comme f^{-1} bijective, on sait (dernier théorème du chapitre précédent) que la famille $(f^{-1}(A_0), f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ càd $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_n[x]$: on sait qu'il existe une unique liste $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ telle que

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \lambda_0 L_0(x) + \lambda_1 L_1(x) + \dots + \lambda_n L_n(x)$. En regardant cette écriture en $x = 0$, (pour les mêmes raisons que précédemment) on trouve $P(0) = \lambda_0$, et plus généralement, $P(j) = \lambda_j$ pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
finalement tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ s'écrit : $P = P(0)L_0 + P(1)L_1 + \dots + P(n)L_n$.

Un exemple pour illustrer :

si $P : x \mapsto x^2$: alors $P(0) = 0, P(1) = 1, \dots, P(n) = n^2$ d'où ce polynôme s'écrit (dans la base des L_j) :
 $P = L_1 + 4L_2 + 9L_3 + \dots + n^2 L_n$.

Corrigé de l'exercice 20 :

- C'est vraiment comme dans le DM ! Linéarité puis opération sur les degrés.
 Vérifier que vous avez bien marqué "soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ " (ou posons $P \in \mathbb{R}_n[x]$), avant d'écrire "donc $\deg(P) \leq n$ " etc.
 Dans le même ordre d'idées, pour montrer la linéarité de Φ , vérifier que vous avez mis l'argument "par linéarité de la dérivation".
- Soit $x \in \mathbb{R}$. pour $k = 0 : \Phi(X^0)(x) = 0$, pour $k = 1, \Phi(X^1)(x) = 2(x-1) + 3x^2 \times 0 = 2x - 2$
 et pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \Phi(X^k)(x) = 2(x-1)(kx^{k-1}) + 3x^2(k(k-1)x^{k-2}) = 2kx^k - 2kx^{k-1} + 3k(k-1)x^k$
 $= k(3k-1)x^k - 2kx^{k-1}$.
 Rappel : il faut distinguer des cas, car si $k < 2, k-2$ est une puissance négative donc $x \mapsto x^{k-2}$ n'est plus un polynôme et n'a aucun sens !
De plus, vous devez écrire $\Phi(X^k)$ sous forme canonique (donc puissances rangées) : sinon, vous ne pouvez pas lire le degré de $\Phi(X^k)$, et il y aura du bluff dans la question suivante !!
- $\text{Im}(\Phi) = \text{Vect}(\Phi(X^0), \Phi(X^1), \Phi(X^2), \dots, \Phi(X^n)) = \text{Vect}(0, 2x-2, 10x^2-4x, \dots, n(3n-1)x^n - 2nx^{n-1})$.
 Commencer par barrer le 0 !
 Ensuite, il reste une famille de polynômes non-nuls et de degrés 2 à 2 distincts puisque pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \deg(\Phi(X^k)) = k$: en effet, $\phi(x) = 2x-2$ donc de degré 1 et pour $k \geq 2$, comme $2k(3k-1) \neq 0$, on a bien $\deg(\Phi(X^k)) = k$.
 On en déduit que la famille génératrice de $\text{Im}(f), \{2x-2, 10x^2-4x, \dots, n(3n-1)x^n - 2nx^{n-1}\}$, est également libre, donc est une base de $\text{Im}(f)$: d'où $\dim(\text{Im}(\Phi)) = n$ (attention de bien compter ! On est parti avec $n+1$ vecteurs, et on en a supprimé un)
 D'où $\text{rg}(\Phi) = n$.
- Théorème du rang : $\dim(\text{Ker}(\Phi)) + n = \dim(\mathbb{R}_n[x])$.
 Comme $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$, on obtient que $\dim(\text{Ker}(\Phi)) = 1$. Une base de $\text{Ker}(\Phi)$ sera donc composée d'un seul vecteur (non-nul).
 Or on a vu que $\Phi(X^0) = 0$, donc $X^0 \in \text{Ker}(\Phi)$.
 D'où $\{X^0\}$, est une famille de $\text{Ker}(\Phi)$ qui est libre, puisque composée d'un seul vecteur non-nul, et de bon cardinal puisque $\dim(\text{Ker}(\Phi)) = 1$. Elle est donc une base de $\text{Ker}(\Phi)$, et en particulier elle est génératrice de $\text{Ker}(\Phi)$ ce qui se traduit par : $\text{Ker}(\Phi) = \text{Vect}(X^0) = \text{Vect}(1)$. $\text{Ker}(\Phi)$ est donc l'ensemble des polynômes constants.

Corrigé de l'exercice 21 :

- Linéarité : rien de nouveau.
 Par contre, les opérations sur le degré ne marchent pas. En effet, soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ alors $\deg(P) \leq n$ donc $\deg(nP) \leq n+1$. Il y aura donc un télescopage.
 Rédaction : soit $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $\Phi(P)(x) = nx(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) - x^2(na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1)$
 $= na_n x^{n+1} + na_{n-1} x^n + \dots + na_1 x^2 + na_0 x - na_n x^{n+1} - (n-1)a_{n-1} x^n - \dots - a_1 x^2$. Il faut alors barrer les deux termes en x^{n+1} qui se télescopent.
 Vous pouvez alors conclure directement $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$ car tous les autres termes sont de degré $\leq n$. (inutile de poursuivre la simplification ici).
- Attention, ici, il suffit de distinguer $k = 0$ et $k \geq 1$. En effet, il n'y a que P' qui apparaît et $(x^k)' = kx^{k-1}$ donc la contrainte $k-1 \geq 0$ (pour avoir un polynôme) donne $k \geq 1$.
 $\Phi(X^0) = nx$ et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Phi(X^k) = nx(x^k) - x^2(kx^{k-1}) = (n-k)x^{k+1}$.
 Vérifier que vous avez bien mis la forme canonique !
 Pour mieux visualiser ce deuxième cas :
 $\Phi(x) = (n-1)x^2, \Phi(x^2) = (n-2)x^3, \dots, \Phi(x^{n-1}) = x^n$ et $\Phi(x^n) = 0$.
- $\text{Im}(\Phi) = \dots = \text{Vect}(nx, (n-1)x^2, \dots, 2x^{n-1}, x^n, 0)$ Supprimer le 0, puis soit faire comme les autres exercices, soit ici variante possible (opérations sur le vect) = $\text{Vect}(x, x^2, \dots, x^n)$. On a fait apparaître une sous-famille de la base canonique, donc libre. On obtient $\text{rg}(\Phi) = n$.
- Méthode : on applique le théorème du rang pour obtenir la "taille" du noyau : $\dim(\text{Ker}(\Phi)) + \text{rg}(\Phi) = \dim(\mathbb{R}_n[x])$
 d'où $\dim(\text{Ker}(\Phi)) = 1$.
 Or $\Phi(X^n) = 0$ donc $X^n \in \text{Ker}(\Phi)$.
 $\{X^n\}$ est une famille de $\text{Ker}(\Phi)$ composée d'un seul vecteur non-nul donc c'est une famille libre de $\text{Ker}(\Phi)$; et elle est de "bon cardinal" car $\dim(\text{Ker}(\Phi)) = 1$. C'est donc une base de $\text{Ker}(\Phi)$. (ce qui répond à la question).
 En particulier, elle est génératrice de $\text{Ker}(\Phi)$ d'où $\text{Ker}(\Phi) = \text{Vect}(X^n)$.

Corrigé de l'exercice 22 :

Bien sûr, il faut commencer par la linéarité, puis montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$:

Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\Phi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q) - (\lambda P + Q)' = \lambda P + Q - (\lambda P' + Q') = \lambda P + Q - \lambda P' - Q' = \lambda(P - P') + (Q - Q') = \lambda \Phi(P) + \Phi(Q)$ par linéarité de la dérivation.

Puis si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, alors $\deg(P) \leq n$, donc $\deg(P') \leq n - 1$ et par somme, $\deg(\Phi(P)) \leq n$. (profitez en pour relire la formule pour le degré d'une somme, avec le max)

Donc Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Il reste à montrer la bijectivité de Φ .

Ici, comme la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$ est finie, il suffit de montrer que Φ est surjective OU de montrer qu'elle est injective !

Ici tout sort bien :

(a) $Im(\Phi) = Vect(\Phi(X^0), \Phi(X^1), \dots, \Phi(X^n)) = Vect(X^0, X^1 - 1, X^2 - 2X, \dots, X^k - kX^{k-1}, \dots, X^n - nX^{n-1})$. Soit faire des opérations sur le vect (cas exceptionnel : marche ici), soit justifier que la famille à l'intérieur du vect est libre (échelonnée en degrés) ... dans tous les cas, vous trouvez $Im(\Phi) = \mathbb{R}_n[x]$, ou $rg(\Phi) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$, donc vous pouvez conclure que Φ est surjective donc bijective.

(b) variante avec le noyau : $P \in Ker(\Phi) \Leftrightarrow \Phi(P) = 0 \Leftrightarrow P = P'$. Par l'absurde, supposons P non constant : alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$ ce qui contredit $P = P'$. Donc P est nécessairement un polynôme constant, donc $P' = 0$ ce qui implique $P = 0$.

Comme $P = 0$ est bien solution, on en déduit que $Ker(\Phi) = \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$ donc Φ est injective, donc Φ est bijective (endomorphisme en dimension finie).

(c) variante avec le dernier théorème du chapitre Applications linéaires : commencer par le relire !

Or la famille $\{\Phi(X^0), \Phi(X^1), \Phi(X^2), \dots, \Phi(X^n)\}$ est la famille $\{X^0, X^1 - 1, X^2 - 2X, \dots, X^k - kX^{k-1}, \dots, X^n - nX^{n-1}\}$: donc elle est libre (pour les raisons évoquées ci-dessus), et de cardinal $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$, donc elle est une base de $\mathbb{R}_n[x]$, donc (th cité précédemment) Φ est bijective.

Corrigé de l'exercice 23

- $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}_2[x])$ donc d'après le cours, il ne peut pas y avoir d'isomorphisme entre ces deux espaces
- On peut remarquer que $f((1, -1, 0)) = 0 + 0x + 0x^2 = 0_{\mathbb{R}[x]}$. Donc $(1, -1, 0) \in Ker(f)$ et comme $(1, -1, 0) \neq (0, 0, 0)$, f n'est pas injective (donc pas bijective).
- $Im(f) = Vect(f(1), f(x), f(x^2)) = Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)) = Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) = \mathbb{R}^3$. Donc f est surjective ... et comme $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = \dim(\mathbb{R}^3)$, on en déduit que f est bijective !

Corrigé de l'exercice 24

- Linéarité ok.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Montrons que $g(P) \in \mathbb{R}_n[x]$. Pour cela, il suffit de montrer que $\deg(P(x+1)) = \deg(P(x))$ (car alors par somme, $\deg(g(P)) \leq \max(\deg(P(x+1)), \deg(P(x))) \leq n$).

Or si $P = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$, avec $a_k \neq 0$ ($k \leq n$), alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = a_k (x+1)^k + \dots + a_1 (x+1) + a_0$, et en développant $(x+1)^k$ par le binôme, $(x+1)^k = x^k + kx^{k-1} + \dots + kx + 1$, d'où $\deg(P(x+1)) = k$. (D'autres rédactions sont possibles).

- Soit $P \in Ker(g)$ et $Q = P - P(0)$. Alors $g(P) = 0 \Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$.

En effet, $Q(0) = P(0) - P(0) = 0$. Puis si $Q(n) = 0$, alors $Q(n+1) = P(n+1) - P(0) = P(n) - P(0)$ (puisque $P(n+1) - P(n) = 0$), d'où $Q(n+1) = Q(n) = 0$ (par H.R.)

Ccl : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$. Donc Q admet une infinité de racines et $Q = 0_{\mathbb{R}[x]}$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = P(0)$ c-à-d P est un polynôme constant.

Réciproquement, si $P = c$ est constant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$ et $g(P) = 0$

Finalement, $ker(g) = \{P = c, c \in \mathbb{R}\} = Vect(1)$.

- D'après la question précédente, $\dim(Ker(g)) = 1$ d'où d'après le théorème du rang, $rg(g) = \dim(\mathbb{R}_n[x]) - \dim(Ker(g)) = n + 1 - 1 = n$.

Sinon, il aurait fallu déterminer $Im(g) = Vect(g(X^0), g(X^1), \dots, g(X^n)) = Vect(0, 1, 2X + 1, 3X^2 + 3X + 1, \dots, nX^{n-1} + \dots + nX + 1)$ d'après la formule du binôme.

On supprime le 0, et on justifie que les autres polynômes sont non-nuls et de degrés deux à deux distincts donc $rg(g) = n$.

Corrigé du bonus de l'exercice 25

Supposons que $Im(f) = Ker(f)$ avec f un endomorphisme de E de dimension $2n$.

Alors d'après le théorème du rang, $\dim(Ker(f)) + rg(f) = 2n$ soit $2rg(f) = 2n$, donc $rg(f) = n$.

De plus, soit $x \in E$. Montrons que $f \circ f(x) = 0$. Or $f(x) \in Im(f)$ par définition, donc par hypothèse, $f(x) \in Ker(f)$, et donc $f(f(x)) = 0$.

On en déduit bien que $f^2 = 0$.

La réciproque est donc vraie.

Corrigé exercice 26

Question 1 :

Pour montrer le résultat il suffit de montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$ car alors en utilisant cette propriété en $k = 1$, puis $k = 2$ puis ... on obtient bien par enchaînement $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f^3) \dots$

Soit $x \in \text{Ker}(f^k)$: alors $f^k(x) = 0$ donc en appliquant f : $f(f^k(x)) = f(0)$ soit encore $f^{k+1}(x) = 0$ puisque f est linéaire, donc $f(0) = 0$ et vu la définition des $f^{\dots}$, $f \circ f^k = f^{k+1}$.
Donc $x \in \text{Ker}(f^{k+1})$.

Montrons maintenant que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$.
Soit $y \in \text{Im}(f^{k+1})$: donc il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$. Mais $f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f$ (attention, les deux sens ne vont pas marcher !! choisir le bon !)
d'où $y = f^k \circ f(x) = f^k(f(x)) \in \text{Im}(f^k)$. Conclure.

Question 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $rg(f^n)$ est la dimension d'une application linéaire, donc un entier positif. De plus d'après la question 1, on en déduit que la suite est décroissante : en effet $\text{Im}(f^n) \subset \text{Im}(f^{n-1}) \Rightarrow \dim(\text{Im}(f^n)) \leq \dim(\text{Im}(f^{n-1})) \Rightarrow rg(f^n) \leq rg(f^{n-1})$.

Il vous reste à visualiser ce que c'est une suite d'entier décroissante et minorée : on sait déjà qu'elle converge, mais converger pour une suite d'entiers, c'est devenir constante. Pour le voir, imaginer une suite décroissante d'entiers qui converge vers 1. Peut-être au début elle vaudra 10 quelques temps, puis elle passera par exemple à 8 puis à 5 ... puis à 3 mais pour s'approcher de 1, comme c'est un entier, nécessairement elle vaudra 1 à partir d'un certain rang.

Corrigé de l'exercice 27

- Montrons que $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f)$: soit $y \in \text{Im}(f \circ g)$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f \circ g(x)$.
Ce qui se réécrit $y = f(g(x))$ d'où $y \in \text{Im}(f)$.
On a bien $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f)$ d'où $\dim(\text{Im}(f \circ g)) \leq \dim(\text{Im}(f))$.
- On sait déjà $rg(f \circ g) \leq rg(f)$. Pour obtenir le résultat voulu, il faut encore montrer que $rg(f \circ g) \leq rg(g)$.
Le problème est qu'il est illusoire de comparer $\text{Im}(f \circ g)$ et $\text{Im}(g)$ (si on n'avait pas des endo de E ces deux ensembles ne seraient même pas sur le même espace ! et écrire des vecteurs sous la forme $f()$ ou $g()$ est très différent).
On commence par appliquer le théorème du rang : $rg(f \circ g) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f \circ g))$ et $rg(g) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(g))$.
Donc si on a une comparaison entre les ensembles $\text{Ker}(g)$ et $\text{Ker}(f \circ g)$ c'est gagné !

Prenons $x \in \text{Ker}(g)$: alors $g(x) = 0$ donc par linéarité de f , $f(g(x)) = f(0) = 0$.

Donc $x \in \text{Ker}(f \circ g)$.

On en déduit $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f \circ g)$ d'où $\dim(\text{Ker}(g)) \leq \dim(\text{Ker}(f \circ g))$.

D'où $\dim(E) - \dim(\text{Ker}(g)) \geq \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f \circ g))$ d'où le résultat.

Corrigé de l'exercice 28

- ϕ est une forme linéaire non nulle de E donc $\text{Ker}(\phi)$ est un hyperplan de E et $\dim(\text{Ker}(\phi)) = 1$.
En effet, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(\phi)) = \dim(E) - rg(\phi) = 2 - rg(\phi)$.
Or ϕ est une forme linéaire donc $\text{Im}(\phi) \subset \mathbb{R}$, et donc $rg(\phi) \leq 1$, et comme elle est non nulle, $\dim(\text{Im}(\phi)) > 0$ d'où $rg(\phi) = 1$.
- Soit $x \in E$, alors $\phi(x) \in \mathbb{R}$, donc comme E est un espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire, et $f(x) \in E$.
Linéarité : Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors par linéarité de ϕ , on obtient : $f(\lambda x + y) = \lambda x + y + \phi(\lambda x + y)u = \lambda x + y + (\lambda \phi(x) + \phi(y))u = \lambda f(x) + f(y)$.
- Soit $x \in E$: $x \in \text{Ker}(f - id) \Leftrightarrow (f - id)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \phi(x)u = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = 0$ puisque $u \neq \vec{0}$.
Donc $\text{Ker}(f - id) = \text{Ker}(\phi)$, et $\dim(\text{Ker}(f - id)) = 1$.
- Comme E est de dimension finie, f est un isomorphisme de E si et seulement si f est injective donc ssi $\text{Ker}(f) = \{0\}$.
Etudions le noyau de $\text{Ker}(f)$: on sait déjà $0 \in \text{Ker}(f)$, donc c'est l'autre inclusion qui est intéressante.
Soit $x \in \text{Ker}(f)$.
Alors $f(x) = 0$ donc $x + \phi(x)u = 0$ (*) càd $x = -\phi(x)u$.
Mais alors, en appliquant ϕ linéaire (ne pas oublier que $-\phi(x) \in \mathbb{R}$) :
 $\phi(x) = -\phi(x)\phi(u)$ d'où $(1 + \phi(u))\phi(x) = 0$.

Si on suppose maintenant que $\phi(u) \neq -1$, cela force $\phi(x) = 0$.

Mais alors en revenant à (*), on obtient $x + 0 = 0$ d'où $x = 0$.

Autrement dit, si $\phi(u) \neq -1$, alors par double inclusion, $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et f est un isomorphisme de E .

Réciproquement, si $\phi(u) = -1$, alors $f(u) = u + \phi(u)u = u - u = 0$ donc $u \in \text{Ker}(f)$ et comme u est un vecteur non-nul, on en déduit que f n'est pas injective donc pas bijective.