Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Intégrales généralisées

Corrigé de l'exercice de révision 1 : Posons $f : t \mapsto \frac{e^t}{t}$.

1. $F(x)$ existe dès que f est continue sur $[1, x]$. Or f est continue sur $\mathbb{R}^*$, et $[1, x] \subset \mathbb{R}^* \Leftrightarrow 0 \notin [1, x] \Leftrightarrow x > 0$.
   Donc F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Puis si $x > 0$, $[1, x] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) > 0$. Donc si $x \geq 1$, (bornes dans le bon sens) $F(x) \geq 0$ et si $x \leq 1$, $F(x) \leq 0$.
2. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $1 \in \mathbb{R}_+^*$, F est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 (théorème fondamental). En particulier F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (même C^1) et $F' = f > 0$. Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Comme $F(1) = 0$, on retrouve bien le signe de F obtenu dans la question 1.
3. Méthode : encadrement. Attention comme le but est de faire tendre x vers 0, il faut prendre $0 < x < 1$!
   $x \leq t \leq 1 \Rightarrow e^x \leq e^t \leq e \Rightarrow \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e}{t}$ et comme les bornes sont dans le mauvais sens :
   $e^x \int_1^x \frac{1}{t} dt \geq F(x) \geq e \int_1^x \frac{1}{t} dt$. D'où $e^x \ln x \geq F(x) \geq e \ln x$.
   On en déduit : $F(x) \to -\infty$ quand $x \to 0$.
4. Méthode 1 :
   Comme $F(x)$ est défini via une intégrale, il faut aussi écrire $\ln x$ via une intégrale pour pouvoir les comparer : $F(x) - \ln x = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt$. Comme pour $x \geq 1$, l'intérieur de l'intégrale est positif et les bornes sont dans le bon sens, on a bien $F(x) - \ln x \geq 0$.
   D'où $F(x) \geq \ln x$, et par comparaison, $F(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

   Méthode 2 :
   poser $g(x) = F(x) - \ln(x)$ sur $[1, +\infty[$. Alors g est dérivable sur $[1, +\infty[$, et $g'(x) = f(x) - \frac{1}{x} = \frac{e^x - 1}{x} \geq 0$ puisque $x \geq 1$. Donc g est croissante sur $[1, +\infty[$, et comme $g(1) = F(1) = 0$, on obtient g positive : $\forall x \in [1, +\infty[$, $F(x) - \ln(x) \geq 0$. Conclure comme dans l'autre méthode.

Corrigé de l'exercice de révision 2 : Posons $g : t \mapsto \frac{1}{\ln(1+t^2)}$.

1. $t \mapsto \ln(1 + t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, donc g est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
   Par ailleurs, $f(x)$ existe si g est continue sur $[x, 2x]$.
   Or pour tout $x > 0$, $2x > 0$ donc $[x, 2x] \subset]0, +\infty[$ donc $f(x)$ existe, et de même pour tout $x < 0$, $2x < 0$ donc $[x, 2x] \subset]-\infty, 0[$ et $f(x)$ existe. Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
   De plus, $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $1 + t^2 \geq 1$ donc $\ln(1 + t^2) \geq 0$ et $g(t) \geq 0$:
   si $x < 2x \Leftrightarrow 0 < x$, on obtient par positivité de l'intégrale que $g(x) \geq 0$.
   si $x > 2x \Leftrightarrow x < 0$, on a $f(x) = -\int_{2x}^x g(t)dt \leq 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et avec le changement de variable C^1 $y = -t$, $dy = -dt$ on obtient (ne pas oublier de changer les bornes : $t = -x \Rightarrow y = x$ et $t = -2x \Rightarrow y = 2x$) :
   $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+(-y)^2)}(-dy) = -\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+y^2)} dy = -f(x)$.
   Donc f est impaire sur $\mathbb{R}^*$.
3. g étant continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, g admet une primitive G sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$. Comme G est une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$, par définition, G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $G' = g$. Donc par composée et somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2\frac{1}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)} = \frac{2\ln(1+x^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\ln(1+x^2)} = \frac{\ln((1+x^2)^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\ln(1+x^2)}$. Le raisonnement est le même sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$, et la dérivée f' est identique. D'où f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et de dérivée ci-dessus.
   Donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln((1 + x^2)^2) \geq \ln(1 + 4x^2)$
   $\Leftrightarrow 1 + 2x^2 + x^4 \geq 1 + 4x^2 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.
4. Point méthode : pour trouver une limite sur une intégrale, il faut procéder par encadrement de l'intégrale.
   Soit $x > 0$: alors $x < 2x$ et $x \leq t \leq 2x \Rightarrow x^2 \leq t^2 \leq 4x^2 \Rightarrow \ln(1 + x^2) \leq \ln(1 + t^2) \leq \ln(1 + 4x^2)$
   $\Rightarrow \frac{1}{\ln(1+4x^2)} \leq g(t) \leq \frac{1}{\ln(1+x^2)} \Rightarrow \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+4x^2)} dt \leq \int_x^{2x} g(t)dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+x^2)} dt$ (bornes dans le bon sens)
   $\Rightarrow \frac{1}{\ln(1+4x^2)}[t]_x^{2x} \leq f(t) \leq \frac{1}{\ln(1+x^2)}[t]_x^{2x} \Rightarrow \frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq f(t) \leq \frac{x}{\ln(1+x^2)}$.
   Or d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} = +\infty$ car $\frac{x}{\ln(1+4x^2)} = \frac{x}{\ln(x^2(4+1/x^2))} = \frac{x}{2\ln x + \ln(4+1/x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{x}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'où par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
   et par imparité, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
   (Attention, pour trouver la limite en $-\infty$ sans passer par l'imparité, il fallait repartir du début, car votre encadrement n'est vrai que pour $x > 0$)
   En 0^+, l'encadrement reste vrai (puisqu'il est vrai pour tout $x > 0$) et $\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x}{4x^2} = \frac{1}{4x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc par comparaison, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$
   Par imparité, on trouve $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$, donc f n'admet pas de limite en 0.

Corrigé de l'exercice de révision 3

1. problème du x dans l'intégrande, alors que dans les deux autres exercices, le x était seulement dans les bornes de l'intégrale.
2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \sqrt{x^2+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,x]$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ existe : g est définie sur $\mathbb{R}$.
3. Pour $x \neq 0$, $g(x) = \int_0^x \sqrt{x^2}\sqrt{1+(\frac{t}{x})^2}dt$. Posons $y = t/x \Leftrightarrow t = yx$, chgt de variable C^1. Alors $dt = xdy$ et les bornes deviennent : $t = 0 \Rightarrow y = 0$ et $t = x \Rightarrow y = 1$. D'où $g(x) = \int_0^1 \sqrt{x^2}\sqrt{1+y^2}xdy = x\sqrt{x^2}\int_0^1 \sqrt{1+y^2}dy$ $= cx|x|$ avec $c = \int_0^1 \sqrt{1+y^2}dy$.
   Donc pour tout $x \neq 0$, $g(x) = cx|x|$, et comme $g(0) = 0$, cette relation est encore vraie pour $x = 0$.
4. Attention de ne pas reprendre l'expression initiale de g ! Dans tout le reste de l'exercice, il faut utiliser la forme trouvée au 3. et garder la lettre c (qui cache une constante strictement positive).
   $x \mapsto x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc par produit g est continue sur $\mathbb{R}$, et au moins dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Etude de la dérivabilité de g en 0, point en lequel les résultats de cours ne s'appliquent plus :
   $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{g(x)}{x} = c|x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \in \mathbb{R}$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = cx^2$ d'où $g'(x) = 2cx > 0$ puisque $c > 0$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ avec $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
   Pour l'autre moitié du tableau (sur $\mathbb{R}_-^*$), soit on remarque que g est impaire, soit on passe par $g(x) = -cx^2$ d'où $g'(x) = -2cx > 0$ car $x < 0$ et $c > 0$ ...

Corrigé de l'exercice 1

a) $t \mapsto \sin(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $A \geq 0$. Alors $\int_0^A \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^A = -\cos(A)+1$, quantité qui n'a pas de limite quand $A \to +\infty$.
Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t)dt$ diverge.

Pour les autres exemples, je marque juste l'étape du crochet + limite + ccl

b) $\int_1^x \frac{1}{u}\ln(u)du = [\frac{1}{2}(\ln u)^2]_1^x = \frac{1}{2}\ln(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc l'intégrale diverge.

c) $\int_0^A \tan(x)dx = \int_0^A \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$ (on remarque en gros la forme $\frac{u'}{u}$ à la constante près)
$= [-\ln|\cos(x)|]_0^A = -\ln(\cos(A)) + \ln(\cos 0)$ (car le cos est positif sur l'intervalle considéré) $= -\ln(\cos(A)) \underset{A\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} +\infty$,
car $\cos(A) \underset{A\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ par continuité du cosinus.
Donc l'intégrale diverge.

d) $\int_0^x \frac{t}{(t^2+2)^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{(t^2+2)^2}dt = \frac{1}{2}[-\frac{1}{(t^2+2)}]_0^x = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{0+2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+2)^2}dt$ converge et vaut $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+2)^2}dt = \frac{1}{4}$.

e) $\int_1^A \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_1^A \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}dx = [\ln(|x|) - \ln(|x+1|)]_1^A = \ln(A) - \ln(A+1) + \ln(2) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}$ FI ! donc on poursuit le calcul
$= \ln(\frac{A}{A+1}) + \ln(2) = \ln(\frac{1}{1+1/A}) + \ln(2) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$ car $\frac{1}{1+1/A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx$ converge et vaut : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx = \ln(2)$.

f) $t \mapsto \frac{e^{-1/t}}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.
Comme on reconnait une primitive, on peut tout faire d'un coup en posant 2 lettres. (Autrement dit, il est inutile de couper l'intégrale en 2 parties et d'étudier $\int_0^1$ ... puis $\int_1^{+\infty}$ ...).
Posons $0 < A < B$.
Alors $\int_A^B \frac{1}{t^2}e^{-1/t}dt = [e^{-1/t}]_A^B = e^{-1/B} - e^{-1/A} \underset{\substack{B\to+\infty \\ A\to 0^+}}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1$ car $-\frac{1}{B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $-\frac{1}{A} \underset{A\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}e^{-1/t}dt$ converge et vaut : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}e^{-1/t}dt = 1$

g) $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$ donc intégrale impropre en $-\infty$ et $+\infty$. Comme on reconnait une primitive, on pose 2 lettres : soit $A < B$.
Alors $\int_A^B \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan(t)]_A^B = \arctan(B) - \arctan(A) \underset{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$.

h)** difficile du fait du paramètre β.

$\dfrac{1}{t(\ln t)^\beta} = \dfrac{1}{t} \times \dfrac{1}{(\ln t)^\beta} = \dfrac{1}{t}(\ln t)^{-\beta}$ donc de la forme $u'u^\alpha$, avec $\alpha \neq -1$.

Avec $1 < A < B$, $\int_A^B \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}dt = [\frac{1}{-\beta+1}(\ln t)^{-\beta+1}]_A^B = \frac{1}{-\beta+1}(\frac{1}{(\ln(B))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(A))^{\beta-1}})$.

Or $\beta - 1 > 0$ puisque $\beta > 1$ d'où $\ln(B)^{\beta-1} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln(A)^{\beta-1} \underset{A\to1^+}{\longrightarrow} 0^+$.

Finalement, on trouve $\int_A^B \frac{1}{t(\ln t)^\beta}dt \underset{\substack{B\to+\infty \\ A\to1}}{\longrightarrow} +\infty$. Donc l'intégrale diverge.

i) Ici, le calcul de primitive se fait plutôt bien ... mais le passage à la limite est plus technique (car FI).

Soit $0 < A < B$. Alors $\int_A^B \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = [2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}]_A^B = 2\sqrt{B} - 2\sqrt{B+1} - (2\sqrt{A} - 2\sqrt{A+1})$.

FI $\infty - \infty$ quand $B \to +\infty$. Il faut poursuivre le calcul.

or $\sqrt{B} - \sqrt{B+1} = \sqrt{B} - \sqrt{B(1+\frac{1}{B})} = \sqrt{B}(1 - \sqrt{1+\frac{1}{B}}) = -\sqrt{B}(\sqrt{1+\frac{1}{B}} - 1) \underset{B\to+\infty}{\sim} -\sqrt{B}\frac{1}{2}\frac{1}{B} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{B}}$, d'après l'équivalent usuel avec $\frac{1}{B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (rappel : $\sqrt{1+u} - 1 \underset{j\to0}{\sim} \frac{1}{2}$)

d'où $\sqrt{B} - \sqrt{B+1} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Finalement $\int_A^B \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx \underset{\substack{B\to+\infty \\ A\to0}}{\longrightarrow} 0 + 2 = 2$. Conclure !

Corrigé de l'exercice 2

> METHODE : si on ne voit pas "tout de suite" le critère que l'on va utiliser :
> 1. commencer par justifier la continuité pour bien identifier le problème
> 2. chercher alors un équivalent de l'intérieur au point à problème, pour SIMPLIFIER l'intérieur.
> 3. si, cela ne suffit pas, se ramener alors à une intégrale de Riemann via la négligeabilité (marche dans au moins 4 cas sur 5 !) comme suit :
> Pour de la convergence en $+\infty$, essayer $\frac{1}{t^2}$.
> Pour de la convergence en 0, essayer $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

(a)$t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, 1]$ et se prolonge par continuité en 0 puisque $\frac{\sin t}{t} \underset{t\to0}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}$ donc l'intégrale est faussement impropre (et converge).

(b) $t \mapsto \frac{1}{\sin t}$ est continue et positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, donc l'intégrale est impropre en 0.
Or en 0, $\frac{1}{\sin t} \sim \frac{1}{t}$ (équivalent usuel). Comme $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge (Riemann $\alpha = 1$), d'après le critère d'équivalence pour les fonctions continues et positives, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sin t}dt$ diverge donc l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}dt$ diverge.

(c) En $+\infty$, $\frac{\ln x}{x+e^{-x}} \sim \frac{\ln x}{x} \geq \frac{1}{x}$ pour $x \geq e$. Divergence.

(d) En $+\infty$, $|\frac{\sin x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ donc critère de comparaison pour obtenir la cv absolue, ce qui implique la convergence.

(e) en $+\infty$, $e^{-\sqrt{x}} = o(\frac{1}{x^2})$. Convergence.

(f) Intégrale doublement impropre. En 0 : $y \mapsto \frac{y-1}{\ln y}$ se prolonge par continuité puisque $\frac{y-1}{\ln y} \underset{y\to0}{\longrightarrow} 0$
En 1 : chgt de variable $x = y - 1$. Alors $\frac{y-1}{\ln y} = \frac{x}{\ln(1+x)} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}$ donc se prolonge encore par continuité.

(g) On connait une primitive du ln, donc calcul direct possible (poser une lettre). Ou alors montrer qu'en 0 : $\ln(x) = o(\frac{1}{\sqrt{x}})$ puisque $\sqrt{x}\ln x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ (croissances comparées). Convergence.

(h) Attention, ne pas utiliser de linéarité ! (ici chaque morceau diverge grossièrement).
En $+\infty$, $\ln(1+u) - \ln u = \ln(1+\frac{1}{u}) \sim \frac{1}{u}$ car $\frac{1}{u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Divergence.

(i) Doublement impropre et intérieur négatif. En 0, $|\frac{\sqrt{x}}{\ln(1-x)}| \sim |\frac{\sqrt{x}}{-x}| = \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc intégrale $\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{x}}{\ln(1-x)}dx$ absolument convergente donc convergente.
En 1, prolongement par continuité donc intégrale faussement impropre et $\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1-x)}dx$ converge.

(j) Intégrale doublement impropre. Soit par l'astuce : $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ puis calcul direct (poser deux lettres.).
Soit couper l'intégrale en 2 et remarquer qu'en 0, $\frac{1}{x(x-1)} \sim \frac{1}{-x}$ donc divergence. (passer par $-\frac{1}{x(x-1)}$, pour avoir la positivité de l'intérieur, puis la linéarité pour conclure. Ici la cv absolue ne marche pas, puisque ce n'est pas parce que l'intégrale ne converge pas absolument qu'elle diverge ....).

Corrigé de l'exercice 3

méthode : "Cv et calcul" donc comme pas de primitive usuelle, on essaie l'IPP ...

1. Intégrale impropre en $+\infty$ car l'intégrande est continue sur $[1,+\infty[$.
   On pose $u=\ln t$, $v'=\frac{1}{t^2}$, alors $u'=\frac{1}{t}$ et $v=-\frac{1}{t}$. De plus, u et v sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$.
   D'où, pour $A>1$, $\int_1^A \frac{\ln t}{t^2}dt=[-\frac{1}{t}\ln t]_1^A+\int_1^A \frac{1}{t^2}dt=-\frac{\ln A}{A}+[-\frac{1}{t}]_1^A=-\frac{\ln A}{A}-\frac{1}{A}+1 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1\in\mathbb{R}$.
   Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2}dt$ converge, et $\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2}dt=1$.
   Remarque : ici, on aurait aussi pu faire le changement de variable : $x=\frac{1}{t}$.

2. Soit $\alpha>-1$.
   $t\mapsto t^\alpha\ln t$ est continue sur $]0,1]$, donc l'intégrale est impropre en 0.
   IPP : on pose $u=\ln t$, $v'=t^\alpha$, alors $u'=\frac{1}{t}$ et $v=\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}$, car $\alpha\neq-1$, (u,v) de classe C^1 sur $]0,1]$.
   D'où, pour $0<x<1$, $\int_x^1 t^\alpha\ln t dt=[\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\ln t]_x^1+\int_x^1\frac{1}{\alpha+1}t^\alpha dt=0-\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln x-(\frac{1}{\alpha+1})^2[t^{\alpha+1}]_x^1=-\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln x-(\frac{1}{\alpha+1})^2[1-x^{\alpha+1}]\underset{x\to0}{\longrightarrow}-(\frac{1}{\alpha+1})^2\in\mathbb{R}$ (croissances comparées pour le 1er terme, avec $\alpha+1>0$).
   Donc l'intégrale $\int_0^1 t^\alpha\ln t dt$ converge, et $\int_0^1 t^\alpha\ln tdt=-(\frac{1}{\alpha+1})^2$
   (ne pas être surpris par un résultat négatif, car pour $t\in]0,1]$, $t^\alpha\ln t\leq 0$)

Corrigé de l'exercice 4

rédaction vue en classe donc je donne simplement les nouvelles intégrales : il reste à les calculer. Ne pas oublier la continuité en première étape pour identifier là où les intégrales sont impropres !!

1. (a) cv car $\frac{\ln t}{1+t^2}=o(\frac{1}{t^3/2})$ puis $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{-\ln y}{1+y^2}dy$.
   (b) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t-e^t}dt$ a même nature que $\int_0^{+\infty}ue^{-u}du$: IPP à faire sur cette dernière intégrale tronquée pour obt cv et calcul (ou pour la cv dire que $ue^{-u}=o(\frac{1}{u^2})$ ou $ue^{-u}=o(e^{-u/2})$).
   (c) cv ok car en 0 $\frac{1}{x+\sqrt{x}}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$, puis $I=\int_0^1\frac{2}{t+1}dt=[2\ln(t+1)]_0^1$ ....
   (d) cv ok car en $+\infty$, $\frac{(t-1)^n}{t^{n+2}}\sim\frac{1}{t^2}$.
   Calcul un peu plus lourd sur les puissances : soyez précautionneux !! $\int_1^{+\infty}\frac{(t-1)^n}{t^{n+2}}dt=\int_0^1(1-y)^n dy=[-\frac{(1-y)^{n+1}}{n+1}]_0^1=$ ...
2. intégrale non impropre !!! pas de difficulté : pour le calcul n'oubliez pas l'astuce revue exo 1. (e)

Corrigé de l'exercice 5

La fonction $x\mapsto(x\ln x)^n$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 (avec la valeur 0 si $n\in\mathbb{N}^*$ par croissances comparées, et avec la valeur 1 si $n=0$) donc I existe bien.
Ecrire $I_n=\int_0^1 x^n(\ln x)^n dx$ et faire l'IPP sur l'intégrale tronquée avant de passer à la limite : on trouve $I_n=0-\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{n-1}dx$.
On pourrait bien sûr refaire une IPP et itérer ainsi le raisonnement.
Variante : posons $J_{n,k}=\int_0^1 x^n(\ln(x))^k dx$ alors en refaisant l'IPP précédente on obtient $J_{n,k}=-\frac{k}{n+1}J_{n,k-1}$ (vraie pour tout k) d'où $J_{n,n}=-\frac{n}{n+1}J_{n,n-1}$
$=(-\frac{n}{n+1})(-\frac{n-1}{n+1})J_{n,n-2}=....=(-\frac{n}{n+1})(-\frac{n-1}{n+1})...(-\frac{1}{n+1})J_{n,0}=(-1)^n n!\frac{1}{(n+1)^n}$.
Or (calcul à faire), $J_{n,0}=\frac{1}{n+1}$ d'où le résultat.

Corrigé de l'exercice 6 :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et
   $$f(-x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}=\frac{1}{e^x}\frac{1}{(\frac{e^x+1}{e^x})^2}=\frac{1}{e^x}\frac{(e^x)^2}{(e^x+1)^2} \qquad \text{(en effet } (\frac{a}{b})^2=\frac{a^2}{b^2} \text{ et } \frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}\text{).}$$
   D'où après simplification, $f(-x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}=f(x)$.
   Donc f est paire sur $\mathbb{R}$.
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. De plus, on reconnaît en gros la forme $\frac{u'}{u^2}$ ...
   Posons $A>0$.
   Alors $\int_0^A\dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}dt=[-\dfrac{1}{1+e^t}]_0^A=-\dfrac{1}{1+e^A}+\dfrac{1}{2}\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2}$
   Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{e^t}{(1+e^t)^2}dt$ converge et vaut $\int_0^{+\infty}\frac{e^t}{(1+e^t)^2}dt=\frac{1}{2}$.
3. Comme f est paire sur $\mathbb{R}$, et que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{e^t}{(1+e^t)^2}dt$ converge, alors (cf dernier th du chapitre) l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^t}{(1+e^t)^2}dt$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^t}{(1+e^t)^2}dt=2\int_0^{+\infty}\frac{e^t}{(1+e^t)^2}dt=1$.

Fin du corrigé de l'exercice 8

4. On a : pour tout $x \in [0,1]$, $x \geq x^2$. Or pour tout réel t, $|\sin t| \in [0,1]$, d'où $|\sin t| \geq |\sin t|^2 = (\sin t)^2$.
   Formule de trigo : $\cos(2t) = \cos(t+t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\sin^2(t)$ d'où $\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1-\cos(2t))$.

5. D'où $|\frac{\sin t}{t}| \geq \frac{1}{2}\frac{1}{t} - \frac{\cos(2t)}{2t}$. Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}dt$ converge d'après 3., et (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$), l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge. Donc par linéarité, l'intégrale $\int_1^{+\infty} (\frac{1}{2}\frac{1}{t} - \frac{\cos(2t)}{2t})dt$ diverge et d'après le critère par comparaison des intégrales positives, on en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|dt$ diverge.
   Autrement dit, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge (question 2.) mais ne converge pas absolument.

Corrigé de l'exercice 11

Posons $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$ donc u_n existe.
   $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t}dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln(3) - \ln(2)$ et $u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2t}dt = \frac{1}{2}[\ln(1+2t)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(3)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale, $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^{n+1}} - \frac{1}{1+t+t^n}dt = \int_0^1 \frac{1+t+t^n-(1+t+t^{n+1})}{(1+t+t^{n+1})(1+t+t^n)}dt = \int_0^1 \frac{t^n - t^{n+1})}{(1+t+t^{n+1})(1+t+t^n)}dt = \int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{(1+t+t^{n+1})(1+t+t^n)}dt$. Or pour tout $t \in [0,1]$, $\frac{(1-t)t^n}{(1+t+t^{n+1})(1+t+t^n)} \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale, comme les bornes sont dans le bon sens, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
   Donc la suite (u_n) est croissante. Il reste à la majorer pour conclure quant à la convergence.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Or pour tout $t \in [0,1]$, $\frac{1}{1+t+t^n} \leq 1$ ou prendre $\frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t}$ ou .... d'où par croissance de l'intégrale, comme $0 < 1$, $u_n \leq \int_0^1 1dt = [t]_0^1 = 1$ (ou $u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$ ...)
   Donc la suite (u_n), croissante et majorée par 1 (ou $\ln(2)$ ...) converge.

3. (a) On sait trouver des encadrements sur des intégrales : le problème c'est qu'au milieu on a $\ln(2)$-intégrale. Idée : on écrit $\ln(2)$ comme une intégrale : $\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$. Alors
   $\ln(2) - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}dt = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}dt$. Il reste à encadrer cette intégrale.
   Or pour $t \in [0,1]$, $(1+t)(1+t+t^n) \geq 1 \times 1 = 1$ donc comme $t^n \geq 0$, on obtient : $0 \leq \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} \leq t^n$. Il reste à intégrer : $0 \leq \ln(2) - u_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}[t^{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
   (b) Théorème d'encadrement : $\ln(2) - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

4. (a) Pour tout $n \geq 2$, $1 + t = o(t^n)$ (attention serait faux si $n = 1$ ou $n = 0$!) donc $1 + t + t^n \sim t^n$ et $\frac{1}{1+t+t^n} \sim \frac{1}{t^n}$.
   Comme de plus $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}dt$ converge pour $n \geq 2$ (Riemann), d'après le critère d'équivalence pour les fonctions continues et positives (à vérifier), l'intégrale v_n converge bien pour $n \geq 2$.
   (b) Encadrons l'intégrande : $t \geq 1 \Rightarrow 1 + t + t^n \geq t^n \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{t^n} = t^{-n}$. Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens, et toutes les intégrales en jeu convergent) : $\boxed{0 \leq v_n \leq \int_1^{+\infty} t^{-n}dt}$
   Réaliser que la propriété de croissance reste vraie pour les intégrales convergentes.
   $\boxed{\text{il est donc inutile de tronquer l'intégrale au moment de passer à l'intégrale}}$
   Il reste à calculer cette dernière intégrale : soit $A > 1$. $\int_1^A t^{-n}dt = \frac{1}{-n+1}[t^{-n+1}]_1^A = \frac{1}{-n+1}[\frac{1}{A^{n-1}} - 1] \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{-n+1} = \frac{1}{n-1}$ puisque $n > 1$ donc $A^{n-1} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Donc $\int_1^{+\infty} t^{-n}dt = \frac{1}{n-1}$ et l'encadrement encadré ci-dessus donne bien : $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}$.
   Conclusion : théorème d'encadrement $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où par somme $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.
   On obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \ln(2)$.

Corrigé de l'exercice 14

1. Soit $x > 0$, alors $t \mapsto \frac{\ln(t)}{x+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc l'intégrale est doublement impropre.
   Or en $+\infty$, $\frac{\ln t}{x+t^2} = o(\frac{1}{t^{3/2}})$ donc cv (bien rédiger le critère de négligeabilité avec tous les arguments !).
   En 0 $\frac{\ln t}{x+t^2} \sim \frac{1}{x}\ln(t)$ et cette intégrale est bien convergente en effet : $\int_A^1 \ln t dt = [t\ln t - t]_A^1 = -1 - A\ln(A) \underset{A\to 0}{\longrightarrow} -1 \in \mathbb{R}$ par croissances comparées.
   Donc l'intégrale converge bien, et $f(x)$ existe bien.

2. f est définie en 0 si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt$ converge.
   Elle est doublement impropre.
   Or en 0, cette intégrale diverge : en effet, on peut montrer que pour tout $t \leq e^{-1}$, $\frac{-\ln t}{t^2} \geq \frac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ diverge.
   Ou remarquer que en 0 $\frac{1}{t} = o(\frac{-\ln(t)}{t^2})$ (faire le quotient) donc comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge, l'autre aussi...
   attention, si vous aviez mis des valeurs absolues : ne pas dire elle dv en valeurs absolues donc elle diverge !! (faux !cf exo 8) il fallait remarquer que le signe était constant donc la valeur absolue revient à l'opposé et donc par linéarité ..... ok

3. c'est l'exercice 4. 1. (a) fait en classe

Corrigé de l'exercice 15

1. Soit $x > 0$. Montrons que $f(x)$ existe, càd que l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.
Or comme $x > 0$, $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.
De plus, en $+\infty$, $\frac{e^{-t}}{t} = o(e^{-t})$, les intégrandes sont positifs et l'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t}dt$ converge, et d'après le critère par comparaison pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge.
2. Soit $x > 0$. $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc y admet une primitive : soit F l'une d'entre elle. Alors (par définition de la convergence), $f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \int_x^X \frac{e^{-t}}{t}dt = \lim\limits_{X\to+\infty} [F(t)]_x^X = \lim\limits_{X\to+\infty} F(X) - F(x) = c - F(x)$ avec $c = \lim\limits_{X\to+\infty} F(X) \in \mathbb{R}$ (puisque l'intégrale converge, la limite est un réel !).
Comme F est continue, dérivable (même C^1) sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
et $f'(x) = 0 - F'(x) = -\frac{e^{-x}}{x} < 0$ donc f strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, ce qui ne doit pas surprendre vu que f est le reste de l'aire sous la courbe ...
Variante :
Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge, d'après la relation de chasles : $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt = cste - F(x)$ où (théorème fondamental), F est l'unique primitive qui s'annule en 1 .....

3. Prolongement par continuité en 0 :
f se prolonge par continuité en 0 si f admet une limite finie quand $x \to 0$, donc si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge.
Or en 0, $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$, tout est positif, et l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}dt$ diverge donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ diverge. f ne se prolonge pas par continuité en 0.

Sinon, faire un encadrement (comme dans tous les problèmes de limite) mais ici les encadrements "classiques" ne marchent pas car en partant de $t \leq x$, on a une inégalité dans le mauvais sens .... ou alors une intégrale divergente en $+\infty$ (donc on ne peut pas intégrer).La solution consiste à couper l'intégrale, pour n'étudier que $\lim\limits_{x\to 0} \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt$. En effet, cela revient bien au même car par relation de Chasles, $f(x) = f(1) + \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt$. Et ainsi, on évite le "double problème" puisqu'on n'a plus la borne $+\infty$.
Bref, encadrement de $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt$: pour tout $t \in [x, 1]$, $e^{-x} \leq e^{-t} \leq e^{-1}$ et comme $t > 0$, $\frac{e^{-x}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-1}}{t}$ et donc par croissance de l'intégrale, avec $x < 1$, et après calcul de l'intégrale :
$-e^{-x}\ln(x) \geq \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt \leq -e^{-1}\ln(x)$. D'où par comparaison, $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, et par suite $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Ouf !
4. $t \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{t} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$ car $e^{-t} \geq 0$.
Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens), et pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \leq \int_x^{+\infty} e^{-t}dt$.
Il reste à calculer cette dernière intégrale :
soit $X > 0$. Alors $\int_x^X e^{-t}dt = [-e^{-t}]_x^X = e^{-x} - e^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-x}$ d'où $\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-x}$.
On obtient : $\forall x \geq 1$, $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$. Théorème d'encadrement : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. Soit $A > x$. Alors en posant $u = \frac{1}{t}$ et $v' = e^{-t}$, u, v C^1 sur $[x, +\infty[$, on obtient $\int_x^A \frac{e^{-t}}{t}dt = [-\frac{e^{-t}}{t}]_x^A - \int_x^A \frac{e^{-t}}{t^2}dt$.
D'où, ($A \to +\infty$, tout converge) $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt$.
Il reste à montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt = o(\frac{e^{-x}}{x})$ car alors, on obtient bien $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.
Or pour tout $t \geq x$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{t^2} \leq \frac{e^{-t}}{x^2}$ d'où (toutes les intégrales sont convergentes, par ce qui précède)
$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2}dt = \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = \frac{1}{x^2}e^{-x}$ (calcul déjà fait).
Comme en $+\infty$, $\frac{1}{x^2} = o(\frac{1}{x})$, on obtient bien la négligeabilité voulue.

Corrigé de l'exercice 16

1. Soit $x > 1$. On a que $f : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3-1}}$ est continue sur $]1, x]$ donc l'intégrale $F(x)$ est impropre en 1. Il faut donc montrer la cv de cette intégrale pour obtenir l'existence de $F(x)$.
Or pour $t > 1$, $\frac{t}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{t}{\sqrt{t-1}\sqrt{1+t+t^2}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{(t-1)^{1/2}}$ intégrande d'une intégrale de Riemann généralisée qui converge car $\frac{1}{2} < 1$.
2. Attention, le théorème fondamental ne peut pas s'appliquer tel quel, car l'intégrande n'est pas continu sur $[1, +\infty[$.
Soit on reproduit le schéma de l'exo 15 : par continuité de f sur $]1, +\infty[$, on peut prendre g une primitive de f

sur $]1,+\infty[$. Alors comme l'intégrale converge, on a pour tout $x>1$,
$F(x)=\lim\limits_{A\to 1}\int_A^x f(t)dt=\lim\limits_{A\to 1}[g(t)]_A^x=\lim\limits_{A\to 1}(g(x)-g(A))=g(x)-\lim\limits_{A\to 1}g(A)=g(x)-c$ puisque l'intégrale étant convergente, on sait que cette limite est finie.
Donc par somme d'une constante et d'une fonction dérivable sur $]1,+\infty[$, F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $F'(x)=g'(x)-0=f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3-1}}$.

Soit écrire par relation de Chasles (possible puisque l'intégrale cv), $F(x)=\int_1^2 f(t)dt+\int_2^x f(t)dt$. La première intégrale est une constante, et pour la deuxième on peut appliquer le th fondamental sur $]1,+\infty[$.

3. Etudier la limite de F en $+\infty$ revient (par définition !) à étudier la cv de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{t^3-1}}dt$.
Or en $+\infty$, $\frac{t}{\sqrt{t^3-1}}\sim\frac{t}{t^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{t}}$ intégrande d'une intégrale de Riemann divergente.
Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{t^3-1}}dt$ diverge, et comme c'est l'intégrale d'une fonction positive, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ (cf cours section 3.1.)