Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille : Intégration sur un segment

Corrigé fin exercice 1

$M = \int_1^4 t^{3/2} - 2tdt = [\frac{t^{5/2}}{5/2} - t^2]_1^4 = ...$

$P = \int_{-1}^1 |x^2 - x|dx$: or $x^2 - x = x(x-1)$ est négatif sur $[0,1]$ et positif sur $[-1,0]$. Relation de Chasles : $P = \int_{-1}^0 |x^2-x|dx + \int_0^1 |x^2-x|dx = \int_{-1}^0 x^2-xdx + \int_0^1 x-x^2dx = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2]_{-1}^0 + [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^1 = -(-\frac{1}{3}) - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 1.$

$Q = \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{-2}\int_0^{1/2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}[2\sqrt{1-x^2}]_0^{1/2} = -(\sqrt{3/4} - \sqrt{1}) = ...$

$R = \int_0^1 max(x, \frac{1}{3})$. Or $max(x, \frac{1}{3}) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 13 \\ \frac{1}{3} & \text{si } x < 1/3 \end{cases}$. D'où (relation de Chasles),

$R = \int_0^{1/3} max(x, 1/3)dx + \int_{1/3}^1 max(x, 1/3)dx = \int_0^{1/3} \frac{1}{3}dx + \int_{1/3}^1 xdx = [\frac{1}{3}x]_0^{1/3} + [\frac{1}{2}x^2]_{1/3}^1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{5}{9}.$

Corrigé fin exercice 2

g est continue sur l'intervalle $]-\infty, 3]$ donc y admet des primitives.
D'après le théorème fondamental, on sait que $F : x \mapsto \int_0^x g(t)dt$ en est une.
Il reste à calculer F : pas de reconnaissance de primitive ... mais un produit. Penser à l'IPP ! On trouve (dériver t et primitiver $\sqrt{3-t} = (3-t)^{1/2}$: $-\frac{(3-t)^{3/2}}{3/2}$) $F(x) = [-t\frac{(3-t)^{3/2}}{3/2}]_0^x + \frac{2}{3}\int_0^x (3-t)^{3/2}dt = -\frac{2}{3}x(3-x)^{3/2} + \frac{2}{3}[-\frac{(3-t)^{5/2}}{5/2}]_0^x$ ....
Pour obtenir toutes les primitives, il reste à ajouter $+c$ où c est une constante quelconque ....

h est continue sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. Attention, cet ensemble n'est plus un intervalle ! ! Il faut donc faire une étude intervalle après intervalle.
Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, poser par exemple $F : x \mapsto \int_2^x \frac{3}{t(t-1)}dt$, qui est bien une primitive de h sur $]1, +\infty[$ d'après le théorème fondamental ... On utilise l'astuce déjà vue : $F(x) = 3\int_2^x \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1}dt = 3[\ln(|t|) - \ln(|t-1|)]_2^x = 3(\ln(x) - \ln(x-1) - \ln(2))$.
Sur l'intervalle $]0, 1[$, on pose par exemple $G : x \mapsto \int_{1/2}^x \frac{3}{t(t-1)}dt = 3[\ln(t) - \ln(|t-1|)]_{1/2}^x = 3(\ln(x) - \ln(1-x))$ (attention, ici, les valeurs absolues ne sont plus du facultatives ! !)
Enfin sur $]-\infty, 0[$, poser par exemple $H : x \mapsto \int_{-1}^x \frac{3}{t(t-1)}dt$ ... et ici les deux valeurs absolues doivent être gardées dans le ln ....

Corrigé exercice 3

$x \mapsto x^2$ est C^1 bijectif de $[0, 10]$ sur $[0, 100]$.
Posons $y = x^2$ alors $dy = 2xdx$ et les bornes deviennent : $x = 0 \Rightarrow y = 0$ et $x = 10 \Rightarrow y = 100$. D'où $I = \int_0^{100} \frac{1/2dy}{(y+1)(y+2)} = \frac{1}{2}\int_0^{100} \frac{1}{(y+1)(y+2)}dy$.
Remarque : on aurait aussi pu renverser le changement de variable en écrivant $x = \sqrt{y}$ d'où $dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}dy$ et en remplaçant tout ....
Pour finir le calcul, il est nécessaire de transformer ce produit. Astuce déjà vue (pour rendre une somme télescopique) : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. En fait ce résultat marche pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, puisque $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$.
Donc en particulier, cela est vrai en $x = y + 1$.
D'où $I = \frac{1}{2}\int_0^{100} \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}dy = \frac{1}{2}[\ln|y+1| - \ln|y+2|]_0^{100} = \frac{1}{2}(\ln(101) - \ln(102) - (\ln(0) - \ln(2)))$.

$t \mapsto e^t$ ets C^1 bijectif de $[0, 10]$ dans $[1, e^{10}]$.
On pose $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln(x)$, $dt = \frac{1}{x}dx$, bornes : $t = 0 \Rightarrow x = 1$ et $t = 10 \Rightarrow x = e^{10}$.
D'où $J = \int_1^{e^{10}} \frac{1}{x + \frac{1}{x}}\frac{1}{x}dx = \int_1^{e^{10}} \frac{1}{x^2+1}dx = [\arctan(x)]1^{e^{10}} = ...$

On pose $t = \frac{1}{x}$ alors $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2}dt$, bornes : $x = 1/2 \Rightarrow t = 2$ et $x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.
Bref, $K = \int_2^{1/2} \cos(\frac{1/t}{1+1/t^2})\frac{\ln(1/t)}{1/t}(-\frac{1}{t^2}dt) = \int_2^{1/2} \cos(\frac{t}{t^2+1})\frac{-t\ln(t)}{t^2}(-dt) = \int_2^{1/2} \cos(\frac{t}{1+t^2})\frac{\ln(t)}{t}dt = -K$.
D'où $2K = 0$ et finalement, $K = 0$ ....

Corrigé fin exercice 4

$M = \int_0^1 y^3 e^{y^2}dy$.
Première piste, poser $u' = y^3$ et $v = e^{y^2}$. Réaliser alors que la nouvelle intégrale dans l'IPP n'est pas plus simple bien au contraire .... C'est donc qu'il faut primitiver l'exponentielle et dériver les puissances de y (comme pour I et J). Mais pour pouvoir primitiver, il faut la forme $u'e^u$.
Or $M = \int_0^1 y^2 \times ye^{y^2}dy$, et là on pose $u' = ye^{y^2}$ (d'où $u = \frac{1}{2}e^{y^2}$), et $v = y^2$ d'où $v' = 2y$.

Comme u et v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$, d'après l'intégration par parties, on obtient :
$M = [\frac{1}{2}e^{y^2}y^2]_0^1 - \int_0^1 ye^{y^2}dy = \frac{1}{2}e - [\frac{1}{2}e^{y^2}]_0^1 = \frac{1}{2}e - (\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Calcul de $N = \int_{-\pi}^{+\pi} x\cos(x)dx$.
Méthode sans IPP : on peut remarquer que $f : x \mapsto x\cos(x)$ est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-\pi,\pi]$ (en effet, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -x\cos(-x) = -x\cos(x) = -f(x)$ par parité du cos) donc (cf résultat de cours), $N = 0$.
Sinon, par IPP : poser $u' = \cos(x)$ (donc $u = \sin(x)$), et $v = x$ d'où $v' = 1$.... on retombe bien sûr sur 0 !

Calcul de $P = \int_0^{\pi/4} e^t\cos(4t)dt$. Poser $u' = e^t$ et $v = \cos(4t)$ d'où $v' = -4\sin(4t)$.
Alors après calculs, on trouve $P = -e^{\pi/4} - 1 + 4\int_0^{\pi/4} e^t\sin(4t)dt$. En refaisant une IPP, (on pose $u' = e^t$ et $v = \sin(4t)$ donc $v' = 4\cos(4t)$), on trouve $P = -e^{\pi/4} - 1 + 4(0 - 4\int_0^1 e^t\cos(4t)dt)$. Il reste à reconnaître que cette dernière intégrale n'est autre que P !
D'où $P = -e^{\pi/4} - 1 - 16P$ d'où $P = \frac{1}{17}(-e^{\pi/4} - 1)$

Corrigé exercice 8

1. Pour $x \neq -1$, $1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^{n-1}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = \dfrac{1-(-x)^n}{1-(-x)}$ car $-x \neq 1$
$= \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{(-x)^n}{1+x}$.

2. On reconnait sous l'intégrale le $\frac{(-x)^n}{1+x}$ du membre de droite de la question 1.
On renverse le 1. pour isoler ce terme : on a donc pour tout $x \neq 1$
$\frac{(-x)^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^{n-1}x^{n-1})$.

   Les fonctions en jeu étant toutes continues sur $[0,1]$ on peut intégrer cette égalité. D'où
$\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^{n-1}x^{n-1})dx$ et par linéarité de l'intégrale
$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - (\int_0^1 1dx - \int_0^1 xdx + \int_0^1 x^2dx + ... + (-1)^{n-1}\int_0^1 x^{n-1}dx)$
$= [\ln(1+x)]_0^1 - ([x]_0^1 - [\frac{x^2}{2}]_0^1 + [\frac{x^3}{3}]_0^1 + ... + (-1)^{n-1}[\frac{x^n}{n}]_0^1$
$= \ln(2) - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n})$
$= \ln(2) - (\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}) = \ln(2) - u_n$
(remarque : si vous aviez imaginé $(-1)^{k+1}$ c'est la mêem chose ! puisque $(-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}(-1)^2 = (-1)^{k-1}$).

   Variante : on aurait pu bien sûr garder le signe somme :
pour tout $x \neq 1$ $\frac{(-x)^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} - (\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k)$ d'où (même blabla, y compris la linéarité de l'intégrale)
$\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_0^1 x^k dx$
$= [\ln(1+x)]_0^1 - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k[\frac{x^{k+1}}{k+1}]_0^1 = \ln(2) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \ln(2) - u_n$.

3. Par encadrement (méthode à retenir !).
$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} \leq 1$ donc par produit avec $x^n \geq 0$, $\frac{x^n}{1+x} \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale, avec $0 < 1$, $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

4. Il faut mettre bout à bout tout ce qu'on a trouvé.
D'après 2., $|\ln(2) - u_n| = |\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx|$ donc d'après l'inégalité triangulaire
$|\ln(2) - u_n| \leq \int_0^1 |\frac{(-x)^n}{1+x}|dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+1}$ d'après 3.
Donc $0 \leq |\ln(2) - u_n| \leq \frac{1}{n+1}$.
Par théorème d'encadrement, comme $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient $\ln(2) - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où (comme $\ln(2)$ est une constante) : $-u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2)$et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

   Remarque : pour ceux qui ont bloqué sur $|(-x)^n|$ une piste possible : $|(-x)^n| = |(-1)^n x^n| = |(-1)^n||x^n| = x^n$ car $x \geq 0$ donc $x^n \geq 0$ et comme $(-1)^n$ vaut 1 ou -1, dans tous les cas $|(-1)^n| = 1$ .....

Corrigé exercice 11

1. $u_0 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}dx$. Ecrivons $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$ sous la forme $\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$ comme l'énoncé le suggère.
Pour $x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$, $a\frac{1}{1-x} + b\frac{1}{1+x} = \frac{a(1+x)+b(1-x)}{1-x^2} = \frac{(a+b)+(a-b)x}{1-x^2}$. On cherche donc a, b réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(a+b) + (a-b)x = 1$. Par identification des coefficients, (de chaque côté, il y a un polynôme !) on obtient le système $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases}$ d'où $a = b = \frac{1}{2}$.

D'où par linéarité, $u_0 = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x}dx + \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x}dx = \frac{1}{2}[-\ln(|1-x|]_0^{1/2} + \frac{1}{2}[\ln(|1+x|)]_0^{1/2}$
$= \frac{1}{2}(-\ln(1/2) + \ln(3/2)) = \frac{1}{2}\ln(3)$.
Par ailleurs, $u_1 = \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x^2}dx = \frac{1}{-2}\int_0^{1/2} \frac{-2x}{1-x^2}dx = \frac{-1}{2}[\ln(|1-x^2|)]_0^{1/2} = \frac{-1}{2}\ln(3/4)$.

2. Par linéarité, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+2} = \int_0^{1/2} \frac{x^n - x^{n+2}}{1-x^2}dx = \int_0^{1/2} \frac{x^n(1-x^2)}{1-x^2}dx = \int_0^{1/2} x^n dx = [\frac{1}{n+1}x^{n+1}]_0^{1/2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.
On en déduit que (pour $n = 0$), $u_0 - u_2 = \frac{1}{2}$ d'où $u_2 = \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}$.
De même, $u_1 - u_3 = \frac{1}{2\times 2^2}$ d'où $u_3 = \frac{-1}{2}\ln(3/4) - \frac{1}{8}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1} - x^n}{1-x^2}dx = \int_0^{1/2} \frac{x^n(x-1)}{1-x^2}dx$. Or pour $0 \le x \le 1/2$, $x^n(x-1) \le 0$ et $1 - x^2 > 0$, d'où par positivité de l'intégrale $(0 < 1/2)$, $u_{n+1} - u_n \le 0$.
4. Construction : $0 \le x \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le x^2 \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} \le 1 - x^2 \le 1 \Rightarrow 1 \le \frac{1}{1-x^2} \le \frac{4}{3} \Rightarrow 0 \le x^n \le \frac{x^n}{1-x^2} \le \frac{4}{3}x^n$ car $x^n \ge 0$. Par croissance de l'intégrale $(0 < 1/2)$: $0 \le u_n \le \frac{4}{3}\int_0^{1/2} x^n dx = \frac{4}{3}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.
Théorème d'encadrement : la suite (u_n) converge vers 0.

Corrigé exercice 13 : question 2

Idée : comme f est de classe C^1 sur [0,1], on peut mettre en oeuvre une intégration par parties en dérivant f, ce qui permet (en primitivant $t \mapsto \sin(nt)$) de faire sortir un $\frac{1}{n}$ qui tend vers 0.

On pose : $u' = \sin(nt)$, $v = f(t)$
$u = -\frac{1}{n}\cos(nt)$, $v' = f'(t)$. Alors u,v, sont C^1 sur $[0,1]$ et

$v_n = \int_0^1 f(t)\sin(nt)dt = [-\frac{1}{n}\cos(nt)f(t)]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 f'(t)\cos(nt)dt = -\frac{\cos(n)f(1)}{n} + \frac{f(0)}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 f'(t)\cos(nt)dt$.
or $|-\frac{\cos(n)f(1)}{n}| \le \frac{|\cos(n)f(1)|}{n} \le \frac{|f(1)|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $f(1) \in \mathbb{R}$, donc d'après le théorème d'encadrement, $-\frac{\cos(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
De même $|\frac{f(0)}{n}| \le \frac{|f(0)|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\frac{f(0)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Enfin, d'après l'inégalité triangulaire, comme $0 < 1$,
$|\frac{1}{n}\int_0^1 f'(t)\cos(nt)dt| = \frac{1}{n}|\int_0^1 f'(t)\cos(nt)dt| \le \frac{1}{n}\int_0^1 |f'(t)\cos(nt)|dt \le \frac{1}{n}\int_0^1 |f'(t)|dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $\int_0^1 |f'(t)|dt \in \mathbb{R}$ est une constante. Donc théorème d'encadrement : $\frac{1}{n}\int_0^1 f'(t)\cos(nt)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par somme, on en déduit bien que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Corrigé exercice 18

1. $f : t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc si $0 \notin [x, x^2]$, $h(x)$ sera bien défini. Ce qui est le cas sur $\mathbb{R}_+^*$, car si $x > 0$, $x^2 > 0$ et $0 \notin [x, x^2]$. En revanche, si $x \le 0$, comme $x^2 > 0$, on aura $0 \notin [x, x^2]$ et f n'est donc pas continue sur $[x, x^2]$. $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}_+^*$.
2. Attention ! piège dans le sens des bornes !
$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) > 0$: donc si $x \ge 1$, alors $x^2 \ge x$ d'où par croissance de l'intégrale, $h(x) \ge 0$. Mais si $0 < x < 1$, $x^2 \le x$, et donc $h(x) \le 0$.
3. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc y admet des primitives. Soit F l'une d'entre elles. Alors par définition de l'intégrale, pour $x > 0$, $h(x) = [F(t)]_x^{x^2} = F(x^2) - F(x)$. Comme F est dérivable de dérivée f continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par somme et composée, h est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,
$h'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = 2x\frac{e^{-x^4}}{x^2} - \frac{e^{-x^2}}{x} = \frac{2e^{-x^4} - e^{-x^2}}{x}$.
4. On résout : $2e^{-x^4} - e^{-x^2} > 0 \Leftrightarrow 2e^{-x^4} > e^{-x^2} \Leftrightarrow \ln(2) - x^4 > -x^2$ par stricte croissance du ln $\Leftrightarrow 0 > x^4 - x^2 - \ln(2)$. Il reste à poser $X = x^2 > 0$ pour se ramener à un trinôme : $0 > X^2 - X - \ln(2)$.
$\Delta = 1 + 4\ln(2) > 0$ donc deux racines $\frac{1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2} < 0$ et $R = \frac{1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2} > 0$. Vu la contrainte $X > 0$, l'ensemble solution en X est $0 < X < R$ et finalement, $h'(x) > 0$ pour $0 < x < \sqrt{R}$ (puisque $x > 0$).
5. Encadrement, attention de bien distinguer le cas $x > 1$ et $x < 1$ pour pouvoir utiliser la croissance de l'intégrale !
Pour $x > 1$, $x < x^2$: $x \le t \le x^2 \Rightarrow x^2 \le t^2 \le x^4 \Rightarrow e^{-x^4} \le e^{-t^2} \le e^{-x^2} \Rightarrow \frac{e^{-x^4}}{t} \le \frac{e^{-t^2}}{t} \le \frac{e^{-x^2}}{t}$ et par croissance de l'intégrale $(x < x^2)$, $e^{-x^4}\int_x^{x^2} \frac{1}{t}dt \le h(x) \le e^{-x^2}\int_x^{x^2} \frac{1}{t}dt$ soit $e^{-x^4}\ln(x) \le h(x) \le e^{-x^2}\ln(x)$ puisque $\int_x^{x^2} \frac{1}{t} = [\ln(t)]_x^{x^2} = \ln(x^2) - \ln(x) = 2\ln(x) - \ln(x) = \ln(x)$.
pour $x < 1$, le raisonnement est analogue, mais comme $x^2 < x$, il faut partir de $x \ge t \ge x^2$.
On arrive à $\frac{e^{-x^4}}{t} \ge \frac{e^{-t^2}}{t} \ge \frac{e^{-x^2}}{t}$ et les bornes étant dans le sens contraire, $e^{-x^4}\int_x^{x^2} \frac{1}{t}dt \le h(x) \le e^{-x^2}\int_x^{x^2} \frac{1}{t}dt$ d'où finalement la même conclusion : $e^{-x^4}\ln(x) \le h(x) \le e^{-x^2}\ln(x)$
6. En 0, on trouve $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\infty$ et en $+\infty$, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Corrigé exercice 19

4. Soit $x > 0$.
Etape 1 : il faut commencer par mettre x dans les bornes pour retrouver nos "repères". Posons donc $y = t + x$, chgt de variable C^1. Alors $dy = dt$, $t = 0 \Rightarrow y = x$ et $t = 1 \Rightarrow y = 1 + x$.

D'où $F(x) = \int_x^{1+x} \frac{e^{y-x}}{y} dy = e^{-x} \int_x^{1+x} \frac{e^y}{y} dy = e^{-x} g(x)$ en posant $g(x) = \int_x^{1+x} \frac{e^y}{y} dy$.
Etape 2 : étude de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
On sait que $h : y \mapsto \frac{e^y}{y}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives. Soit H l'une d'entre elles. Alors par définition de l'intégrale, $g(x) = [H(t)]_x^{x+1} = H(x+1) - H(x)$. Comme H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par somme et composée, g l'est et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = H'(x+1) - H'(x) = h'(x+1) - h'(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x}$.
Etape 3 : retour à F via la relation : $F(x) = e^{-x} g(x)$ pour $x > 0$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de deux fonctions dérivables et $F'(x) = -e^{-x} g(x) + e^{-x} g'(x)$ d'où $F'(x) + e^{-x} g(x) = e^{-x} g'(x)$ soit encore $F'(x) + F(x) = e^{-x} g'(x)$.
Il reste à réaliser que $e^{-x} g'(x) = e^{-x} [\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x}] = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}$.

Corrigé exercice 20 : c) et d)

Le but est de se ramener aux sommes de Riemann : pour w_n, commencer par reconnaître $\ln(w_n)$, ou exprimer w_n sous la forme exponentielle ...
On arrive alors à la somme de Riemann $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + \frac{k}{n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+t) dt$, puisque la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est continue sur $[0,1]$.
Il reste à calculer cette intégrale :
soit vous tentez votre chance en adaptant la primitive usuelle du ln (mais alors, vérifier votre "devinette" en dérivant !!)
Effectivement, $t \mapsto (t+1)\ln(1+t) - (t+1)$ est une primitive de $t \mapsto \ln(1+t)$
d'où $\int_0^1 \ln(1+t) dt = [(1+t)\ln(1+t) - (1+t)]_0^1 = 2\ln(2) - 1$

soit (méthode que je préfère), vous faites une IPP (la même que celle pour trouver les primitives du ln). Cela donne :
$I = \int_0^1 \ln(1+t) dt = \int_0^1 1 \times \ln(1+t) dt$
On pose alors $u' = 1$, et $v = \ln(1+t)$. Alors $u = t$, $v' = \frac{1}{1+t}$. D'où $I = [t \ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt$. Il faut alors reconnaître l'intégrale N vue à l'exercice 1 pour finir le calcul.
OU astuce (encore une !), poser $u' = 1$, et $v = \ln(1+t)$et choisir $\boxed{u = t+1}$, $v' = \frac{1}{1+t}$. D'où
$I = [(1+t)\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 (t+1) \frac{1}{t+1} dt = \ln(2) - \int_0^1 1 dt = \ln(2) - [t]_0^1 = \ln(2) - 1$

Bref, au final, on trouve $w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{\ln(2)-1}$

Pour la dernière : même départ (et on verra même fin !!)
$\ln(u_n) = \frac{1}{n} \ln(\frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{n^n}) = \frac{1}{n} \ln(\frac{2n}{n} \times \frac{2n-1}{n} \times \dots \times \frac{n+1}{n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{n+k}{n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+t) dt$
cf rédaction du (w_n).

Corrigé exercice 21

1. $f : t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc (théorème fondamental), F est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. En particulier, F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = e^{x^2} > 0$. F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   $F(0) = 0$.
   Mq F est impaire sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $F(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt$ on effectue le changement de variables $t \to -t$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$: $y = -t$, $dy = -dt$, $t = -x \Rightarrow y = x$ et $t = 0 \Rightarrow y = 0$. D'où $F(-x) = \int_0^x e^{(-y)^2} (-dy) = -\int_0^x e^{y^2} dy = -F(x)$.
   Il reste alors à trouver la limite en $+\infty$:
   Par encadrement : soit $x > 0$. Alors pour tout $t \geq 0$, $e^{t^2} \geq 1$ d'où (croissance de l'intégrale, $x \geq 0$), $F(x) \geq \int_0^x 1 dt = x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit (par imparité), $\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$.
2. Le but est de montrer qu'il existe une unique fonction u telle que $F \circ u = id_{\mathbb{R}}$. Or d'après la question précédente, F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Alors $u = F^{-1}$ convient, et c'est l'unique solution car par bijectivité de F, $F \circ u = id \Leftrightarrow F^{-1} \circ F \circ u = F^{-1} \Leftrightarrow u = F^{-1}$.
3. Le théorème de la bijection assure que $u = F^{-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. De plus, comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) \neq 0$, $u = F^{-1}$ est dérivable sur $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 22

On cherche à résoudre théoriquement l'équation $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$.
On demande l'existence, pas l'existence + unicité .... donc penser au TVI.

Posons $g(x) = f(x) - x$ pour $x \in [0,1]$. Par somme, g est continue sur $[0,1]$. Il reste à montrer que g change de signe pour pouvoir appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
Or $\int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} - [\frac{t^2}{2}]_0^1 = 0$. Donc soit g est nulle sur $[0,1]$, soit g change de signe sur $[0,1]$.
en effet, si g est positive sur $[0,1]$, comme g est continue sur $[0,1]$ et d'intégrale nulle, alors g est identiquement nulle (cf cours). De même si g est négative sur $[0,1]$.

Donc soit g est nulle, soit elle n'est ni positive ni négative donc change de signe.

Donc soit g est nulle et il existe bien $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = 0$ càd $f(c) = c$.
Soit g change de signe, et comme g est continue, on peut appliquer le TVI :
g s'annule et il existe bien $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = 0$ càd $f(c) = c$.