Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Introduction aux ev

Corrigé exercice 1 , par la méthode du Vect, sauf pour F_1 et F_3

On remarque que $\vec{0} = (0,0) \notin F_1$ donc F_1 ne peut pas être un sev de $\mathbb{R}^2$.

Pour $F_2 : x+2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$ d'où $F_2 = \{(-2y,y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(-2,1), y \in \mathbb{R}\} = Vect((-2,1))$ donc F_2 sev de $\mathbb{R}^2$.

F_3 n'est pas un sev car il va y avoir un problème avec le carré dans la condition : en effet, $(1,-1) \in F_3$, puisque $1^2 + (-1) = 0$, mais $2(1,-1) = (2,-2) \notin F_3$ puisque $2^2 + (-2) = 2 \neq 0$.

$F_4 = \{x(1,-1,2), x \in \mathbb{R}\} = Vect((1,-1,2))$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Comme $x + 2y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x - 2y$, $F_5 = \{(x,y,-x-2y), x,y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,-1) + y(0,1,-2), x,y \in \mathbb{R}\}$ $= Vect((1,0,-1),(0,1,-2))$ sev de $\mathbb{R}^3$.

$F_6 = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\} = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$ donc F_6 est un sev de $\mathcal{M}_3, 1(\mathbb{R})$.

Comme $\left\{ \begin{array}{ll} x + 2y & = 0 \\ x + y + 3z & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x + 2y & = 0 \\ \quad -y + 3z & = 0 \end{array} \right.$ système triangulaire avec 2 équations pour 3 inconnues, donc choix d'une inconnue auxiliaire, par exemple y : $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2y \\ z = \frac{1}{3}y \end{array} \right.$
d'où $F_7 = \{\begin{pmatrix} -2y \\ y \\ \frac{1}{3}y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\} = \{y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\} = Vect(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ donc F_7 est un sev de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$F_8 = \{a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, \in \mathbb{R}\} = Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ donc est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$F_9 = \{a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\} = Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix})$ donc F_9 est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et

$F_{10} = \{\begin{pmatrix} 2b + c & b \\ c & d \end{pmatrix}, (b,c,d) \in \mathbb{R}^3\} = Vect(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Corrigé exercice 4

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée et $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, AM = MA\}$.
   Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Par définition, $F \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   $O_n \in E$, car $A0_n = 0_n = 0_n A$ donc $F \neq \varnothing$.
   Soit $M, N \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$ puisque par hypothèse $AM = MA$ et $AN = NA$. Donc $\lambda M + N \in E$.
   Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. $G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ {}^tM = M\}$. Commençons par montrer que G sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Version 1 : écrire les matrices symétriques : $M \in G$ ssi M s'écrit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}$ puis passer au vect ...
   Version 2 : via les trois points.
   Par définition, $G \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   $O_3 \in G$, car ${}^t0_3 = 0_3$ donc $G \neq \varnothing$.
   Soit $M, N \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors d'après les propriétés vues sur la transposée (chapitre Matrices) ${}^t(\lambda M + N) = \lambda {}^tM +^t N = \lambda M + N$ puisque par hypothèse ${}^tM = M$ et ${}^tN = N$. Donc $\lambda M + N \in G$.
   Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   Conclure alors dans les 2 versions que de ce fait, G est un espace vectoriel.
3. La matrice nulle 0_n n'est pas inversible, donc $0_n \notin H$ et H ne peut pas être un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 5, question 2
E ne peut pas être un sous-espace vectoriel car il ne contient pas le vecteur nul (qui par convention est de degré $-\infty$).
Par ailleurs, on sait que $\mathbb{R}_3[x]$ est un sous-espace vectoriel (cf cours) qui contient E. Montrons que c'est le plus petit.
Soit $F \subset \mathbb{R}_3[x]$ sous-espace vectoriel contenant E : but montrer que $F = \mathbb{R}_3[x]$.
On introduit les polynômes particuliers : $U_0 : x \mapsto 1$, $U_1 : x \mapsto x$, $U_2 : x \mapsto x^2$, et $U_3 : x \mapsto x^3$. Comme $E \subset F$, on a $U_3 \in F$ et $U_3 + U_2 \in F$: donc par somme (F sev) $U_2 \in F$ puisque $U_2 = U_3 + U_2 - U_3$. De même, on peut montrer que $U_1 = (U1 + U_3) - U_3 \in F$ et $U_0 = (U_3 + U_0)) - U_3 \in F$. Finalement, (U_0, U_1, U_2, U_3) est une famille de F sev d'où $Vect(U_0, U_1, U_2, U_3) \subset F$. Ce qui donne bien $\mathbb{R}_3[x] \subset F$ et finalement $F = \mathbb{R}_3[x]$.

Exercices 6 et 7 : nous avons fait un exemple de chaque lors des séances d'exercice. Si vous voulez en chercher d'autres, montrez moi votre rédaction ! Dans l'exercice 6, ce sont tous des sev sauf C
pour C, prendre les suites u et v définies par $u_n = 3^n$ et $v_n = 4^n$, et mq $u + v$ ne peut pas être géométriques (par l'absurde, supposer qu'il existe une raison ..., et arrver à une contradiction en regardant les premiers termes ...).

Dans l'exercice 7, ce sont tous des sevs sauf D : en effet, $f : x \to e^x$ est élément de D, mais avec $\lambda = -1$, $\lambda f \notin D$.

Corrigé de l'exercice 10
$z \in Vect(x, y) \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R},\ z = ax + by$
$\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R},\ (k, 2, 3) = (a + b, 2a, a + b)$.
Or le système $\begin{cases} a+b & = k \\ 2a & = 2 \\ a+b & = 3 \end{cases}$ ne peut être compatible que si $k = 3$ (regarder L_1 et L_3.
Et si $k = 3$, le système devient $\begin{cases} a+b & = 3 \\ 2a & = 2 \\ a+b & = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ donc est bien compatible.
Donc $z \in Vect(x, y) \Leftrightarrow k = 3$, et si $k = 3$, $z = x + 2y$.

Corrigé de l'exercice 11

1. On cherche à savoir si il existe 3 réels a, b, c tels que $P = aP_1 + bP_2 + cP_3$. Autrement dit, on cherche à savoir si il existe 3 réels a, b, c tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = aP_1(x) + bP_2(x) + cP_3(x)$.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = aP_1(x) + bP_2(x) + cP_3(x) \Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 - 4x = a + b(x + 1)^2 + cx^3$
$\Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 - 4x = cx^3 + bx^2 + 2bx + (a + b)$ d'où par identification des coefficients,
$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -2 \\ 2b = -4 \\ a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -2 \\ a = -2 \end{cases}$ On a bien trouvé une solution, donc P est bien CL de P_1, P_2 et P_3.
(La CL est : $P = 3P_3 - 2P_2 - 2P_1$).
Plus généralement : $Vect(P_1, P_2, P_3) = \{x \mapsto cx^3 + b(x+1)^2 + a, a, b, c \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto cx^3 + bx^2 + 2bx + a, a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

2. On cherche à savoir si il existe deux réels a et b tels que $(4^n)_{n\in\mathbb{N}} = a(2^n)_{n\in\mathbb{N}} + b(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ce qui revient à : on cherche à savoir si il existe deux réels a et b tels que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}}$, $4^n = a2^n + b3^n$.
Or si on regarde pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, on obtient un système incompatible puisque
$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + 3b = 4 \\ 4a + 9b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ b = 3 \\ 5b = 11 \end{cases}$ (rajouter les opérations du pivot).
Donc on ne peut trouver de réels a et b qui conviennent : $(4^n)_{n\in\mathbb{N}} \notin Vect((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Corrigé de l'exercice 13
Notons e_1, e_2 et e_3 les vecteurs de $\mathcal{F}$. On peut bien sûr deviner $e_3 = e_2 - e_1$ ce qui donne une relation ed liaison entre les 3 vecteurs et permet de conclure que famille est liée.
Sinon, poser $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$ (*), et résoudre le système associé par la méthode du pivot de Gauss.
Réaliser que le système n'est pas de Cramer (après une étape, $L_3 = L_2$) : l'ensemble solution s'écrit par exemple, (an ayant choisi c comme inconnue auxiliaire) : $\mathcal{S} = \{(c, -c, c), c \in \mathbb{R}\}$.
Donc la famille est liée, et pour obtenir une relation de liaison, il suffit de choisir un (a, b, c) solution et de revenir à (*) : par exemple avec $c = 1$, $a = 1$ et $b = -1$ on sait que (*) est vérifiée : donc $e_1 - e_2 + e_3 = 0$. (on trouve ainsi la même relation linéaire que ci-dessus !)
Notons e_1, e_2 et e_3 les vecteurs de $\mathcal{G}$. Remarquer que $e_3 = -e_1$ donc la famille est liée.
Pour ceux qui sont gênés par l'absence de e_2 dans la relation de liaison, l'écrire : $e_1 + 0 \times e_2 + e_3 = 0$ ....

Corrigé de l'exercice 14
Méthode : soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a(1, k, 2) + b(1, 8, k) + c(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$. Système carré d'ordre 3.

La famille est libre dès que le système est de Cramer (pour que $(0,0,0)$ soit l'unique solution), donc elle sera liée, si l'un des pivots (dans la méthode du pivot) est nul.
Les calculs sont un peu lourds, mais la méthode doit être claire !
$a(1,k,2)+b(1,8,k)+c(1,2,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ ka+8b+2c=0 \\ 2a+kb+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c &= 0 \\ (8+k)b+(2-k)c = & 0 \\ (k+2)b-c &= 0 \end{cases}$ (marquer les opérations).

Si $k=-8$, le système devient $\begin{cases} a-b+c &= 0 \\ 10c &= 0 \\ -6b-c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$ donc $k=-8$ ne convient pas.
Et si $k \neq -8 \Leftrightarrow k+8 \neq 0$ alors on peut garder L_2 en ligne pivot pour éliminer le b dans L_3 et arriver à un système triangulaire.
L'opération à faire est : $L_3 \leftarrow (8+k)L_3-(k+2)L_2$ et donne $\begin{cases} a-b+c &= 0 \\ (8+k)b+(2-k)c &= 0 \\ (-(8+k)-(k+2)(2-k))c &= 0 \end{cases}$.
Le système n'est alors pas de Cramer ssi $-(8+k)-(k+2)(2-k)=0$ (car $8+k \neq 0$)
$\Leftrightarrow k^2-k-12=0 \Leftrightarrow k=-3$ ou $k=4$. $(\Delta = 49)$

Corrigé exercice 15
Pour la première, le raccourci s'applique : famille de polynômes non-nuls de degrés 2 à 2 distincts donc libre.
Je valide la rédaction sur la 2eme :

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a(x+1)+b(x-1)=0$.
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x(a+b)+(a-b)=0$ d'où par identification, $\begin{cases} a+b &= 0 \\ a-b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{\ a=b=0$ donc la famille est libre. La 3e est libre aussi.

Pour la 5., un seul vecteur non-nul donc famille libre.
Pour la 7., valider avec la rédaction de la 6. Penser au pour tout x, puis choisir des x judicieux (il en faut 3, puisque 3 inconnues) : par exemple, prendre $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ et $x=\pi$.

Corrigé exercice 16 2. : méthode 2 (pour un autre exemple de méthode 1, regarder l'exo 17)
Soit $\vec{x}=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On va montrer qu'il existe un unique triplet $(a,b,c,) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{x}=ae_1+be_2+ce_3$.
On étudie donc le système $\begin{cases} 2b+2c &= x \\ a \quad +c &= y \\ a-b+c &= z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \quad +c &= y \\ b+2c &= x \\ a-b+c &= z \end{cases} \Leftrightarrow ....$
Deux méthodes : triangulariser le système, pour constater 3 pivots non-nuls.
Ou résoudre le système, pour constater un unique triplet solution.
Dans tous les cas, dire que le système est de Cramer, donc la famille (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Enfin, pour les coordonnées de $\vec{x}=(1,-2,-1)$, on finit la résolution du système précédent, en remplaçant $x=1$, $y=-2$, $z=-1$.
On trouve : $\vec{x}=-\frac{7}{2}e_1-e_2+\frac{3}{2}e_3$.

Corrigé exercice 17
Méthode 2 :
Soit $M = \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrons qu'il existe une unique liste $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ telle que $M=xA+yB+zC+dD$.
(rappel : le but est d'arriver à un système, et de montrer qu'il est de Cramer ... mais pour arriver au système, il faut encore écrire M).
Or M s'écrit $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.
Alors $M=xA+yB+zC+td \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+t & y+z+t \\ z+t & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t &= a \\ y+z+t &= b \\ z+t &= c \\ t &= d \end{cases}$. Le système est triangulaire, avec des pivots tous non-nuls donc le système est de Cramer, donc la famille (A,B,C,D) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Pour trouver les coordonnées de $M=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, on finit la résolution du système précédent avec $a=2$, $b=0$, $c=1$, $d=-3$.
On trouve alors : $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=4 \\ t=-3 \end{cases}$ càd $M=2A-B+4C-3D$.

En notant $\mathcal{B} = (A, B, C, D)$, la matrice des coordonnées de M s'écrit : $Mat_{\mathcal{B}}(M) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \end{array}$.

Remarque, en notant $\mathcal{B}' = (E_{11}, E_{12}, E_{2,1}, E_{22})$ la base canonique, on a $Mat_{\mathcal{B}'}(M) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{14} \end{array} \end{array}$.

Méthode 1 (plus longue) : on montre que la famille $\{A, B, C, D\}$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puis libre.

$Vect(A, B, C, D) = Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$ (opérations $e_2 \leftarrow e_2 - e_1$,$e_3 \leftarrow e_3 - e_1$, $e_4 \leftarrow e_4 - e_1$)

$= Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$ (opérations $e_3 \leftarrow e_3 - e_2$, $e_4 \leftarrow e_4 - e_2$)

$= Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$(opération $e_4 \leftarrow e_4 - e_1$)

$= \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Donc la famille $\{A, B, C, D\}$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrons qu'elle est libre : soit $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tels que $xA + yB + zC + tD = 0$.

Alors $\left\{ \begin{array}{rl} x + y + z + t & = 0 \\ y + z + t & = 0 \\ z + t & = 0 \\ t & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = z = t = 0.$

Conclure : $\{A, B, C, D\}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour trouver les coordonnées de M dans cette base, il faut trouver les réels x, y, z, t tels que $M = xA + yB + zC + tD$. On retombe inévitablement sur le système de la méthode 1.

Exercice 19

$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 3x + y - z = 0\}$.

On commence par résoudre le système (pour pouvoir supprimer le tel que) : or $\left\{ 3x + y - z = 0 \right. \Leftrightarrow \left\{ z = 3x + y \right.$ d'où $\mathcal{S} = \{(x, y, 3x + y) \in \mathbb{R}^3\} = Vect((1, 0, 3); (0, 1, 1))$.

On en déduit que $\mathcal{S}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$, et que la famille $((1, 0, 3); (0, 1, 1))$ est génératrice de $\mathcal{S}$. Comme elle est composée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre, donc elle est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20 3.

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors E s'écrit $E = Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix})$. Donc on a déjà une famille génératrice de E : la question est de savoir si elle est libre, ou si il faut la réduire (en supprimant les redondants).

Soit remarquer directement que $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et barrer la dernière matrice pour arriver à $E = Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$.

Soit faire des opérations sur le Vect (comme dans la question 1. en cours) pour voir la redondance (par exemple, faire $e_3 \leftarrow e_3 - 2e_1$).

Les deux matrices restantes dans le Vect semblent non colinéaires, donc montrer qu'elles forment une famille libre : soit $a, b, \in \mathbb{R}$ tel que $a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors on obtient le système $\left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{array} \right.$ d'où $a = b = 0$ et la famille $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ est libre.

Elle est donc une base de E.

Corrigé exercice 21, 2e partie

Avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, mq que E est un espace vectoriel et trouvons une base de E.

Le principe est de tout faire en même temps, en déterminant les matrices de E, afin de pouvoir écrire E à l'aide d'un Vect.

Poser $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors $AM = 0_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \{ \ a = b = c = d = e = f = 0$

D'où $E = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} \} = Vect(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = Vect(E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$.

On obtient que E ets un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille $\{E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}\}$ est génératrice de E. Comme c'est une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui est une famille libre, alors elle est aussi libre.
Donc la famille $\{E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}\}$ est une base de E.

Corrigé exercice 22

E_1 et E_2 faits en classe ; E_3 identique à E_2
E_4 est déjà écrit sous la forme d'un vect, donc il suffit de simplifier le vect : $E_4 = Vect(2x+1, x+3, 4x+7) = Vect(x+3, -5, -5) = Vect(x+3, 1) = Vect(x, 1)$ donc E_4 sev, et $(1, x)$ famille génératrice de E_4. Comme sous-famille de la base canonique, elle est aussi libre. Donc base de E_4.
Pour E_5, il suffit de vq la famille en jeu est bien libre ... donc base de E_5.

Corrigé exercice 23, dernière question.

On avait montré que pour tout P, polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$, on a la relation :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = P(-1) \times 1 + P'(-1) \times (x+1) + \frac{P''(-1)}{2} \times (x+1)^2 + \frac{P^{(3)}(-1)}{6} \times (x+1)^3$.
Donc on a déjà l'écritude de P dans la base $\mathcal{B}$: pour insister, les coefficients qui apparaissent devant les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont donc les coordonnées de P dans cette base.

Pour P défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.
On calcule : $P(-1) = 0$,
$P'(x) = 1 + 2x + 3x^2$ donc $P'(-1) = 2$
$P''(x) = 2 + 6x$ donc $P''(-1) = -4$
$P'''(x) = 6$ donc $P'''(-1) = 6$.
D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x + x^2 + x^3 = 0 + 2(x+1) - 2 \times (x+1)^2 + (x+1)^3$.

$$Mat_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ (x+1) \\ (x+1)^2 \\ (x+1)^3 \end{array} .$$