Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Limites

Corrigé exercice 1 : ceux non faits en classe

Pour $x > 0$, $d(x) = x^2 - x^2 + x = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et pour $x < 0$, $d(x) = x(-x) - x^2 + x = -2x^2 + x \underset{-\infty}{\sim} -2x^2 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

$f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^1$ car $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ (limite usuelle).

$g(x) = e^{\ln x \ln(1+x)}$: plus astucieux.
Si on veut travailler sur les équivalents, il faut sortir de l'exponentielle (car pas de composition possible) :
$\ln x \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \ln x$ donc d'après les croissances comparées, $\ln x \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$
et par composition des LIMITES, $e^{\ln x \ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^0 = 1$.
Ou par les limites usuelles : (on fait apparaître ce qui nous manque)
$g(x) = e^{\ln x \times \frac{x}{x} \times \ln(1+x)} = e^{x\ln x \times \frac{\ln(1+x)}{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^{0\times 1} = e^0 = 1$.

$i(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \times (1 + \frac{x}{2}) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \times 1$ d'après la limite usuelle sur le ln ....

$l(x) = \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$

$m(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Et en $+\infty$:
$m(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^(1-e^{-x})} = \frac{\sqrt{x}}{e^x} \times \frac{1}{1-e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times 1$ d'après les croissances comparées.

$n(x) = x(e^{1/x} - 1) = \frac{e^{1/x}-1}{1/x} = \frac{e^X - 1}{X}$ avec $X = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où (limite usuelle) : $n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
(on pouvait bien sûr poser dès le début X, puis transformer l'écriture).
Ou par les équivalents : comme $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $e^{1/x} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ et finalement, $n(x) \underset{+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} = 1$, d'où $n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Pour $o(x)$: attention pas de limite usuelle ! on est en $+\infty$. La FI $\frac{\infty}{\infty}$ vient de l'intérieur du ln, donc il faut factoriser à l'intérieur du ln par le prépondérant.
$o(x) = \ln(\frac{e^x(1-e^{-x})}{x}) = \ln(\frac{e^x}{x}) + \ln(1 - e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car d'après les croissances comparées $\frac{e^x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $1 - e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Pour ceux qui veulent utiliser les équivalents : ca marche, mais ne pas composer les équivalents ! !
On regarde juste l'intérieur : $\frac{e^x - 1}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après les croissances comparées,
donc par composition des LIMITES, $o(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (puisque $\ln(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$).

$r(x)$: Fi ∞/∞ donc factoriser par le prépondérant (e^x dans le ln) :
$r(x) = \frac{\ln(e^x(e^{-x}+1))}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(e^x)+\ln(e^{-x}+1)}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(e^{-x}+1)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\ln(e^{-x}+1)}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (dans le deuxième terme, qui est le reste, pas de FI ! ce terme tend vers 0).

Pour $s(x)$: non vous ne rêvez pas .... il n'y a pas de FI, il n'y a rien à faire !

Pour $w(x)$: FI 0/0
sans astuce, poser $h = x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$, alors $w(x) = \frac{(1+h)^n - 1}{h}$ il reste à développer à l'aide du binôme de Newton, simplifier les 1 du numérateur puis simplifier les termes restants par h : on obtient $w(x) = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}h + ... + \binom{n}{n}h^{n-1} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \binom{n}{1} + 0 = n$.
L'astuce consiste à reconnaître la formule de la somme géométrique
$w(x) = \frac{x^n - 1}{x-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 + x + .. + x^{n-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1 + 1 + .. + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

Corrigé exercice 2 : 3e question

$g_1(x) \sim x^2$ car $\ln(x)^20 = o(x^2)$ (reprendre l'échelle vue en 1.). De même, $g_2(x) \sim x^2$.

$g_3(x)$: $\sqrt{x^3 - 1} = (x^3 - 1)^{1/2} \sim (x^3)^{1/2} = x^{3/2}$ d'où $\sqrt{x^3 - 1} = o(x^2)$.
De plus, $\ln(x) = o(x^3)$, d'où $g_3(x) \sim \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$.

$g_4(x) \sim x$, car $\sin(x) = o(x)$ en $+\infty$. En effet, pour $x > 0$, $|\frac{\sin x}{x}| = \frac{|\sin(x)|}{x} \leq \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Enfin pour g_5 : $x^2 + 3 \sim x^2$ et au dénominateur, d'après les croissances comparées, $e^{-x}(\ln x)^{20} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $e^{-x}(\ln(x))^{20} + 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $e^{-x}(\ln(x))^{20} + 1 \sim 1$.
finalement, $g_5(x) \sim x^2$.

Corrigé exercice 3 : ceux non faits en classe

b) en 0 : il faut distinguer à gauche et à droite, et le plus simple est de réaliser que si on se place suffisamment proche de 0 (à gauche ou à droite), la partie entière est constante donc peut être enlevée. Plus précisément : $\forall x \in]0,1[$, $\frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 0 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ et $\forall x \in [-1,0[$, $\frac{\lfloor x \rfloor}{x} = \frac{-1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$. Donc pas de limite en 0. Asymptote verticale à gauche en 0.

d) On a $\sin(\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $e^{\cos x}$ qui est borné : conséquence 2 du théorème d'encadrement.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $0 < e^{-1} \leq e^{\cos(x)} \leq e$ soit encore $|e^{\cos(x)}| \leq e$ d'où pour $x \neq 0$,
$|e^{\cos(x)}\sin(\frac{1}{x})| \leq e|\sin(\frac{1}{x})| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Conséquence 1 du théorème d'encadrement : $e^{\cos(x)}\sin(\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

e) L'esprit est le même, mais ce n'est plus du tout la conséquence 2 du théorème d'encadrement, car $2+\sin(x)$ est bornée, mais x tend vers l'infini (et non en 0).
On va s'en sortir par comparaison (vous pouvez aussi partir d'un encadrement, mais le côté de droite ne servira à rien).
$\forall x > 0$, $-1 \leq \sin(x)$ donc $1 \leq 2+\sin(x)$ et $x \leq x(2+\sin x)$. Comme $x \to +\infty$, par comparaison, $x(2+\sin x) \to +\infty$.

Corrigé exercice 4

1. $x > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   Raisonnement analogue en $-\infty$: $x < -1 \Rightarrow -x > 1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x} < 0$ (car $x < 0$) $\Rightarrow \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = -1 \Rightarrow f(x) = -x$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
2. a) Encadrement du cours pour la partie entière : pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$ d'où $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$.
   Soit $x > 0$: alors $\frac{1}{x} - 1 \leq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$ d'où par produit avec $x > 0$, $1 - x \leq f(x) \leq 1$. Théorème d'encadrement, quand $x \to 0^+$, $f(x) \to 1$.

   b) Raisonnement analogue en 0^- : même encadrement de départ, mais par produit avec $x < 0$: $1-x \geq f(x) \geq 1$. Théorème d'encadrement, quand $x \to 0^-$, $f(x) \to 1$. En particulier, la limite en 0 existe et vaut $0 \in \mathbb{R}$; donc la fonction f se prolonge par continuité en 0.

Méthodes exercice 6.
Dans tout cet exercice, la question est de calculer la limite au point x_0 : si elle existe et est finie, alors la fonction se prolonge par continuité en x_0 (avec la valeur limite trouvée).

1. utiliser la quantité conjuquée au dénominateur puis simplifier
2. pour enlever la valeur absolue, regarder les limites à gauche et à droite (non prolongeable)
3. changer de variable pour se ramener en 0 (poser par exemple $y = x - \frac{\pi}{2}$) puis utiliser une formule de trigo pour le cosinus ....

Corrigé exercice 8

1. $f(x) - 2x = x^2\ln(1+\frac{1}{x}) - 2x$. On donne l'indication $\ln(1+u) - u \underset{u\to0}{\sim} -\frac{u^2}{2}$. Comment l'utiliser ?
   Réaliser que la limite cherchée est en $x \to +\infty$, que l'indication porte sur $u \to 0$
   et que dans notre fonction apparaît $\ln(1+\frac{1}{x})$.
   Idée : poser $u = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors l'équivalent donné en indication peut se réécrire :
   $\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{(1/x)^2}{2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}$.
   Or $f(x) = x^2\ln(1+\frac{1}{x}) - 2x = x^2[\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}] \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 \times (-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}) = -\frac{1}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$.
   Ce qui peut se réécrire : $f(x) - 2x + \frac{1}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   soit encore $f(x) - (2x - \frac{1}{2}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   La droite d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ est donc asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

2. $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln x}$ donc défini ssi $x > 0$.
   Puis $f(x) - x = x^{1+\frac{1}{x}} - x = x \times x^{1/x} - x$ d'après les formules sur les puissances
   $= x(e^{1/x\ln(x)} - 1)$. Or $\frac{1}{x}\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par ailleurs $e^u - 1 \underset{u\to0}{\sim} u$ d'où
   $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x(\frac{1}{x}\ln x) = \ln(x)$
   $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Interprétation graphique : on peut rapidement montrer que $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $f(x)$ se comporte comme x mais pourtant la droite $y = x$ n'est pas asymptote à la courbe. Pire, la courbe (même si elle ressemble à la droite $y = x$) s'écarte de plus en plus de cette droite !

Corrigé exercice 9 b) et c)

b) f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
En 0^+ : $e^{1/x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$.
En $+\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puisque $e^{1/x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et $\frac{f(x)}{x} = (1+\frac{\ln x}{x})e^{1/x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ puisque $\frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après les croissances comparées.
On obtient donc $f(x) \sim x$ donc f se comporte comme x, mais on va voir avec le dernier calcul de limite, que la droite $y = x$ n'est pas asymptote à la courbe puisque $f(x) - x \nrightarrow 0$. En effet,
$f(x) - x = x(e^{1/x} - 1) + \ln x e^{1/x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puisque $x(e^{1/x} - 1) \sim x\frac{1}{x} = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ puisque $u = \frac{1}{x} \to 0$ et $e^u - 1 \sim u$ au voisinage de 0. En résumé, au voisinage de $+\infty$ la courbe de f se comporte un peu comme la droite $y = x$ mais tout en s'éloignant d'elle à l'infini !!

c) $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 1 \geq 0\} =]-\infty, 1] \cup [1, +\infty[$.
En $+\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, puis $f(x) - 2x = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$ (quantité conjuguée)$= \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc la droite $y = 2x$ est bien asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
En $-\infty$: FI pour la limite de f. Quantité conjuguée : $f(x) = \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.

Corrigé exercice 10

1. $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \text{ et } (1+x)^2 \neq 0\} = \mathbb{R}_+^*$.
2. Pour $x > 0$, $(1+x)^2 > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $\ln(x)$: positif sur $[1, +\infty[$, et négatif sur $]0, 1]$.
En 0 : pas de FI, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, et en $+\infty$: $f(x) \sim \frac{\ln x}{x^2}$ car $1 + x \sim x$ donc d'après les croissances comparées, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (ou factoriser : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2(1+1/x)^2} = \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{1}{(1+1/x)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ avec le même argument ...).
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1+x-2x\ln x}{x(1+x)^3}$, donc $u : x \mapsto 1 + x - 2x\ln x$ convient.
Deux méthodes de calcul :
(a) voir f comme un produit : $f(x) = \ln x \times (1+x)^{-2}$ alors $f'(x) = \frac{1}{x} \times (1+x)^{-2} + \ln x \times (-2(1+x)^{-3}) = \frac{1}{x(1+x)^2} + \frac{-2\ln x}{(1+x)^3}$. Il reste à mettre au même dénominateur ...
(b) voir f comme un quotient $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x)^2 - \ln(x)(2(1+x))}{((1+x)^2)^4} = \frac{(1+x)[\frac{1}{x}(1+x) - 2\ln x]}{(1+x)^4} = \frac{\frac{1}{x}(1+x-2\ln x}{(1+x)^3} = \frac{\frac{(1+x-2x\ln x)}{x}}{(1+x)^3} = \frac{1+x-2x\ln x}{x(1+x)^3}$ puisque $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$ (à ne pas confondre avec $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$).
Réaliser que la méthode (a) était plus simple !
4. u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u'(x) = 1 - 2\ln x - 2x \times \frac{1}{x} = -1 - 2\ln x$.
Or $-1 - 2\ln x \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 2\ln x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \ln x \Leftrightarrow e^{-1/2} \leq x$. Donc u admet un maximum en $x = e^{-1/2}$.
Compléter le tableau avec $\lim\limits_{x\to 0} u(0) = 1$ car d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$,
et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$, puisque $u(x) = 1 + x(1 - 2\ln x)$ (ou directement $u(x) \sim -2x\ln x$ en $+\infty$).
5. Au vu du TV de u, u ne s'annule pas sur $]0, e^{-1/2}]$, et sur $]e^{-1/2}, +\infty[$, u est continue et strictement décroissante, et va de $u(e^{-1/2}) > 1 > 0$ à $-\infty$, donc s'annule une unique fois. (la rédaction sera revue dans le chapitre continuité).
6. De la question 5., on déduit le signe de u sur $\mathbb{R}_+^*$: $u(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \alpha$. Or f' est du signe de u puisque $x > 0$. D'où f admet un maximum en α...

Corrigé de l'exercice 11

1. En 1, $f(1) = 1 \geq 0$ et pour $x \neq 1$, faire un tableau de signe : $\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, $x + 1 \geq 0$, $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
ccl : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) \geq 0$.
2. Continuité au point $1 \in \mathcal{D}_f$: montrer que pour $x \neq 1$, $f(x) = \frac{1}{2}\frac{(x+1)\ln x}{x-1} \underset{x\to 1}{\to} f(1) = 1$. F.I. $\frac{0}{0}$ au point $x = 1$
Donc on pose $h = x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. On a : $f(x) = \frac{h+2}{2} \cdot \frac{\ln(1+h)}{h}$. Or $\frac{\ln(1+h)}{h} \underset{h\to 0}{\to} 1$ donc $f(x) \underset{\substack{x\to 1\\ \neq}}{\to} 1 = f(1)$.
En $0 \notin \mathcal{D}_f$:$\frac{1}{2}\frac{x+1}{x-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{-1}{2}$ et $\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et la courbe admet une asymptote verticale : pas de prolongement par continuité en 0.
3. f est dérivable sur $]0, 1[$, resp. $]1, +\infty[$, comme quotient de fonctions usuelles dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et pour $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{(\ln x + (x+1)\frac{1}{x}) \times (x-1) - 1 \times (x+1)\ln x}{(x-1)^2 =} \ldots = \frac{x - 1/x - 2\ln(x)}{2(x-1)^2} = \frac{g(x)}{2(x-1)^2}$.

4. (a) Limites : en $+\infty$, FI $\infty-\infty$ entre le x et le ln, donc on factorise : $g(x)=x(1-2\frac{x}{\ln x})-\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ d'après les croissances comparées (ou dire $g(x)\underset{+\infty}{\sim}x$ car $x=\underset{+\infty}{o}(\ln x)$). J'ai laissé à part le $1/x$ car il n'intervient pas dans la FI, mais on aurait pu mettre x en facteur dans toute l'expression ...
En 0, FI $-\infty+\infty$ entre le $\frac{1}{x}$ et le $\ln x$. D'après les croissances comparées, on sait que les puissances de x sont plus fortes, donc on met le $1/x$ en facteur : $g(x)=x-\frac{1}{x}(1+2x\ln(x))\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}-\infty$.
(Là aussi, j'ai laissé le x à part, qui n'intervient pas dans la FI ...).
Ou avec les équivalents : $\ln x=o(\frac{1}{x})$ en 0, donc $g(x)\underset{0}{\sim}-\frac{1}{x}\to-\infty$.

(b) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}$. Donc g est croissante sur $]0,+\infty[$.
(c) Comme $g(1)=0$, on obtient que $\forall x\in]0,1]$, $g(x)\leq 0$ et $\forall x\in[1,+\infty[$, $g(x)\geq 0$.

5. Donc (le signe de f' étant celui de g), f est croissante sur $]1,+\infty[$ et décroissante sur $]0,1[$. Dans votre tableau de variations, attention de mettre une double barre pour f' en 1 ou un " ?" (et de ne pas m'inventer un 0 !), puisque on ne sait pas si f est dérivable en 1 (cf chapitre ultérieur).
En $+\infty$: $f(x)=\frac{1}{2}\frac{x(1+1/x)}{x(1-1/x)}\ln(x)=\frac{1}{2}\frac{1+1/x}{1-1/x}\ln(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.
Ou avec les équivalents : $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\frac{x\times\ln x}{x}=\frac{1}{2}\ln x\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

6. $\frac{f(x)}{x}\sim\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ d'après les croissances comparées. Ou reprendre la factorisation $f(x)=\frac{1}{2}\frac{1+1/x}{1-1/x}\frac{\ln x}{x}$. (Attention $\frac{a\times b}{c}=\frac{a}{c}\times b=a\times\frac{b}{c}\neq\frac{a}{c}\times\frac{b}{c}=\frac{a\times b}{c^2}$). Cela permet d'obtenir que la croissance de f est plutôt lente .... (cf dernier paragraphe de cours, chapitre limites)

7. Poser $h(x)=(x-1)-\ln(x)$ pour $x\geq 1$ (ou $\ln(x)-(x-1)$) et faire son tableau de variations.
(calculs : $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ et $h(1)=0$ donc h positive sur $[1,+\infty[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$).
Puis comme $\frac{x+1}{x-1}\geq 0$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{\ln(x)}{2}<\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{2}=\frac{x+1}{2}<\frac{x+x}{2}=x$ puisque $1<x$.
(ou pour la dernière inégalité : $x-\frac{x+1}{2}=\frac{x-1}{2}>0$ car $x>1$ donc $\frac{x+1}{2}<x$). Conclure : pour tout $x>1$, $f(x)<x$.

8 (a) Par récurrence, montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, "u_n existe et $u_n>1$" .
Pour $n=0$, $u_0=a>1$. Supposons que pour un certain $n\geq 0$ u_n existe et $u_n>1$.
Montrons que u_{n+1} existe et $u_{n+1}>1$. Or $u_n>1>0$ donc $u_n\in\mathcal{D}_f$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ existe et d'après le TV de f, $u_{n+1}>1$, puisque f admet un minimum strict en 1.
Ou dire $u_n>1\Rightarrow f(u_n)>f(1)$ (par stricte croissance de f sur $]1,+\infty[$) $\Rightarrow u_{n+1}>1$. *Ccl.*

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après la question 7. en $x=u_n>1$, on obtient $f(u_n)<u_n$ càd $u_{n+1}<u_n$. Donc la suite est décroissante.

(c) La suite u, décroissante et minorée par 1, converge. Soit ℓ sa limite. D'après la question 8.(a), on sait que $\ell\geq 1$, et par passage à la limite dans la relation $u_{n+1}=f(u_n)$ (f continue sur $[1,+\infty[$), on obtient $\ell=f(\ell)$. Or d'après 7., si $\ell>1$, alors $f(\ell)<\ell$ donc $\ell\neq f(\ell)$. On en déduit : $\ell=1$.
Attention, vous ne pouviez pas résoudre l'équation $f(\ell)=\ell$ à la main sans distinguer deux cas ! (car impossible de remplacer $f(\ell)$ sans savoir si $\ell=1$ ou si $\ell\neq 1$ ...)