Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Matrices

Corrigé exercice 3

1. $A+B=\begin{pmatrix}3&5\\2&9\end{pmatrix}$, $A-2B=\begin{pmatrix}0&4\\4&6\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}2&14\\4&24\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}6&16\\8&20\end{pmatrix}$, ${}^t(AB)=\begin{pmatrix}2&4\\14&24\end{pmatrix}$,
   ${}^tB=\begin{pmatrix}2&0\\2&4\end{pmatrix}$, et ${}^tA=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$ il reste à faire le produit pour constater que la formule du cours est vraie.
2. puis $3(A-2B)+2(3B+C)-(2A+C)=3A-2A-6B+6B+2C-C=A+C=\begin{pmatrix}3&3\\9&1\end{pmatrix}$.
3. Commencer par dessiner $A-I$ et c'est cette nouvelle matrice que vous devez élever au carré ! Idem pour $B-2I$.
   On trouve $A-I=\begin{pmatrix}0&3\\2&4\end{pmatrix}$ d'où $(A-I)^2=\begin{pmatrix}0&3\\2&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&12\\8&22\end{pmatrix}$. De même, $B-2I=\begin{pmatrix}0&2\\0&2\end{pmatrix}$ et $(B-2I)^3=\begin{pmatrix}0&8\\0&8\end{pmatrix}$
4. $A-3X=2B\Leftrightarrow 3X=A-2B\Leftrightarrow X=\frac{1}{3}(A-2B)\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-1&-1/3\\2/3&-1\end{pmatrix}$

Corrigé exercice 8 : le 2e et 3e

Rappel de la méthode : c'est l'énoncé de l'exercice 7

Pour la 2e matrice A : si vous laissez les 2 dans la matrice, les calculs deviennent vite lourds ! Prendre l'habitude de "sortir" les constantes.
Ainsi, $A=2J$ où J est la matrice avec que des 1. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=2^nJ^n$. Il reste à conjecturer ce qui se passe pour J : les calculs sont tout de suite beaucoup plus faciles ... cf exercice 7.
Finalement, on trouve : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=2^n\times 3^{n-1}J=6^{n-1}A$.

Pour la dernière : pas d'astuce. Regarder les premières puissances et chercher le mécanisme ...
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=\begin{pmatrix}1&2^n-1&n\\0&2^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Corrigé exercice 10

1. Formule du binôme, puisque I et X commutent.
   $(I+X)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^kI^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k$ puisque pour tout $j\in\mathbb{N}$, $I^j=I$ et pour toute matrice A, $AI=A$.
   $=\binom{n}{0}X^0+\binom{n}{1}X+0$ puisque $X^2=0$ donc pour tout $k\geq 2$, $X^k=X^2\times X^{k-2}=0$.
   D'où $(I+X)^n=I+nX$.
   Ou par récurrence, puisque le résultat est donné dans la question !
2. Formule du binôme, puisque I et Y commutent.
   $(I+Y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y^kI^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y^k$
   Attention. On sait que pour tout $k\geq 1$, $Y^k=Y$, mais $Y^0=I\neq Y$ donc le cas $k=0$ est à part.
   D'après la relation de Chasles, $(I+Y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y^k=Y^0+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}Y^k=I+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}Y=I+Y(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k})$.
   Or d'après la formule du binôme pour les réels : $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\binom{n}{0}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}-1=2^n-1$.
   D'où $(I+Y)^n=I+(2^n-1)Y$.
3. Il suffit de remarquer que $A=I+X$ avec $X=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}$, et $X^2=0$.
   Et $B=I+Y$ avec $Y=\begin{pmatrix}-4&-10\\2&5\end{pmatrix}$ et $Y^2=Y$.
   D'où $A^n=I+nX=\begin{pmatrix}1+2n&4n\\-n&1-2n\end{pmatrix}$ et $B^n=I+(2^n-1)Y=\begin{pmatrix}1-4(2^n-1)&-10(2^n-1)\\2(2^n-1)&1+5(2^n-1)\end{pmatrix}$

Corrigé exercice 12 :

Le but est d'utiliser la méthode du binôme de Newton. Si on s'inspire de l'exercice 11 et que l'on pose $A=B-3I$ cela ne marche pas, car il ne se passe pas grand chose pour A^k...
Mais on remarque que $B=2I+J$ et on sait ce qui se passe pour J^k (cf exercice 7) : pour tout $k\geq 1$, $J^k=3^{k-1}J$.
Comme $2I$ et J commutent, d'après la formule du binôme, $B^n=(J+2I)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k(2I)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k2^{n-k}$

et d'après la rel de Chasles

$= 2^nI + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} J^k 2^{n-k} = 2^nI + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k J 2^{n-k} = 2^nI + \frac{1}{3}((2+3)^n - \binom{n}{0}3^0 2^n)J = 2^nI + \frac{1}{3}(5^n - 2^n)J.$

Fin Corrigé exercice 13 :

A la première question, on a trouvé que $a_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3 - 2a_n$.
On reconnait une suite arithmético-géométrique : on résout l'équation $\alpha = 3 - 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$.
On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - 1$.
On sait que la suite b est géométrique de raison (-2) donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = (-2)^n b_0 = -(-2)^n$ puisque $b_0 = a_0 - 1 = -1$.
D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n + 1 = 1 - (-2)^n$.
En remplaçant dans la forme de la matrice trouvée à la question 1, on en déduit :
pour tout $n \in \mathbb{N}$ $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2-2(-2)^n & -1+2(-2)^n & 2-2(-2)^n \\ 1-(-2)^n & -1+(-2)^n & 2-(-2)^n \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 15

1. Montrer qu'une matrice A n'est pas inversible est compliqué dans le cas abstrait, car il faudrait vérifier qu'aucune matrice C ne pourrait convenir, càd que pour toute matrice C, on a $AC \neq I$. On raisonne donc par l'absurde : Supposons que la phrase "Ni A, ni B n'est inversible" soit fausse : cela signifie donc que SOIT la matrice A est inversible, SOIT c'est la matrice B qui l'est.
   Premier cas : la matrice A est inversible : donc on a l'existence de la matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (attention de ne pas l'appeler B car la matrice B est celle de l'énoncé, donc n'a rien à voir avec A ...)
   Il reste à trouver une contradiction, en regardant les hypothèses.
   Or $AB = 0 \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}0 \Rightarrow IB = 0 \Rightarrow B = 0$: contradiction.
   Donc A n'est pas inversible.
   De même, si c'est B qui est inversible : $AB = 0 \Rightarrow ABB^{-1} = 0B^{-1} \Rightarrow A = 0$, contradiction.
   Conclure : ni A ni B n'est inversible.
2. Vérifier par le calcul que $C^2 + C = 0$. Donc $C(C + I) = 0$.
   Or $C \neq 0$, et $C + I = \begin{pmatrix} 2 & ... \\ ... & ... \end{pmatrix} \neq 0$, donc d'après la question 1., ni C ni $C + I$ n'est inversible.
   On obtient bien que C n'est pas inversible.

Fin corrigé exercice 16 :

Rappel : relations de récurrences trouvées $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$; et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + v_n$, $v_{n+1} = 2u_n$.
De ce fait, si on pose $n \in \mathbb{N}$:
$\alpha_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 4u_n + 2v_n = 2\alpha_n$ et
$\beta_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = v_n - u_n = -\beta_n$.
Donc (α_n), resp (β_n) est une suite géométrique de raison 2 (resp . (-1)).
D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = 2^n\alpha_0 = 2^n$ et $\beta_n = (-1)^n\beta_0 = (-1)^{n+1}$.
Il reste à revenir à u_n et v_n donc à résoudre le système $\begin{cases} u_n - v_n & = \beta_n \\ 2u_n + v_n & = \alpha_n \end{cases}$

Or $\begin{cases} u_n - v_n & = (-1)^{n+1} \\ 2u_n + v_n & = 2^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^{n+1} \\ v_n = \frac{1}{3} \times 2^n - \frac{2}{3}(-1)^{n+1} \end{cases}$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (\frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^{n+1})A + (\frac{1}{3} \times 2^n - \frac{2}{3}(-1)^{n+1})I$

$= \frac{1}{3}[(2^n + (-1)^{n+1})A + (2^n - 2(-1)^{n+1})I] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n - 2(-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n - 2(-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n - 2(-1)^{n+1} \end{pmatrix}$

Corrigé exercice 17

Dessiner $A - I$ puis calculer $(A - I)^2$ pour trouver 0.
Ensuite, on sait que comme A et I commutent, $(A - I)^2 = A^2 - 2A \times I + I^2 = A^2 - 2A + I$. D'où $A^2 - 2A + I = 0$.
On enchaîne : $-A^2 + 2A = I$ et $A(-A + 2I) = I$.
Donc A est inversible et $A^{-1} = -A + 2I$ à dessiner .... .

Vu la remarque, on part sur la formule du binôme de Newton.
Les matrices en jeu commutent d'où $A^n = ((A - I) + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(A - I)^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(A - I)^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k}(A - I)^k$car $(A - I)^2 = 0$ donc pour tout $k \geq 2$, $(A - I)^k = 0$.
Finalement, (il ne reste que 2 termes dans la somme, qui se simplifient beaucoup) $A^n = I + n(A - I) = nA + (n - 1)I$.

Corrigé exercice 18

1. comme A et B commutent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(AB)^k = A^k B^k$. Or A est nilpotente donc il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $A^p = 0$. D'où $(AB)^p = A^p B^p = 0$ et AB est nilpotente.
2. Supposons A nilpotente d'indice p et B nilpotente d'indice q : $A^p = 0$ et$B^q = 0$.

   D'après la formule du binôme de Newton (A et B commutent), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A+B)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

   Le but est de trouver un entier n pour lequel cette somme est nulle. Ce sera par exemple le cas, si tous les termes sont nuls : l'idée est donc de trouver n assez grand pour que si k est petit (donc A^k non nul) on ait $n - k \geq q$ donc $B^{n-k} = 0$. Puis quand $k \geq p$, on a de toute façon $A^k = 0$.

   On remarque que $n = p + q$, et même $n = p + q - 1$ convient !

Corrigé exercice 19

1. $(I - A)\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k = \sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k - \sum\limits_{k=0}^{p-1} A^{k+1} = I - A^p$ (somme télescopique).
2. (a) si A était inversible, alors par produit, A^p le serait aussi (cf cours). Comme la matrice nulle n'est pas inversible, on en déduit que la matrice A ne l'est pas non plus.

   (b) Comme $A^p = 0$, le 1. donne $(I - A)(\sum\limits_{k=1}^{p-1} A^k) = I$ donc d'après la définition couplée avec le théorème qui suit, $(I - A)$ est inversible et $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k$.

Corrigé exercice 21 : en partie corrigé PJ manuscrite ...

Corrigé exercice 22 :

Poser la matrice colonne X où les coordonnées sont $x_1, x_2, ...x_n$, et la matrice colonne Y de coefficients $a_1, a_2, ...a_n$.
Résoudre le système $AX = Y$: réaliser qu'il est triangulaire ! !
De plus, entre deux lignes, il n'y a qu'une variable d'écart ...
Donc si vous regardez par exemple les deux premières lignes : vous trouvez $x_1 = a_1 - a_2$ directement ...

On remonte maintenant dans le bon ordre :
On trouve $x_n = a_n$,
$x_{n-1} = a_{n-1} - a_n$,
$x_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-1}$,
...
$x_1 = a_1 - a_2$. Il reste alors à dessiner la matrice inverse : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & -1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & -1 & ... \\ ... \\ ... \end{pmatrix}$ (dans la dernière ligne, il n'y a que des 0 sauf le dernier coeff =1).

Exercice 26

1. On trouve $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. On trouve $AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ puis $D = diag(-2, -2, 1)$.
3. Allez courage !
4. On trouve $AX_n = X_{n+1}$ donc (X_n) est une suite géométrique de matriecs de raison A et de premier terme $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

   Il reste à faire le produit matriciel avec la matrice A^n trouvée pour obtenir les expressions voulues !