Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Séries

Corrigé fin de l'exercice 1

Série $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$

$\forall n \geq 2$, $v_n = \ln(1-\frac{1}{n}) = \ln(\frac{n-1}{n}) = \ln(n-1) - \ln(n)$ terme général d'une série télescopique. Posons pour $n \geq 2$, $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} v_k$. Alors $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} [\ln(k-1) - \ln(k)] = \ln(1) - \ln(n) = -\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$ diverge.

Série $\sum\limits_{n\geq 2} w_n$

Pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ terme général d'une série télescopique. Comme précédemment, on pose la somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} w_k$. Alors $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} [\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}] = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}$. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 2} w_n$ converge et la somme de la série est $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} w_n = 1$.

Corrigé de la fin de l'exercice 2

4. Pour tout $n \geq 3$, $\ln(n) \geq \ln(e) = 1$ d'où $4^n \ln(n) \geq 4^n$ et finalement, $\frac{5}{4^n \ln(n)} \leq \frac{5}{4^n} = 5(\frac{1}{4})^n$. Il reste à rédiger le critère de comparaison pour les séries à termes positifs (cf rédaction en classe), puisque la série $\sum\limits_{n\geq 0} (\frac{1}{4})^n$ est une série géométrique convergente car $|\frac{1}{4}| < 1$.

OU montrer que $\frac{5}{4^n \ln(n)} = o((\frac{1}{4})^n)$ puisque $\dfrac{\frac{5}{4^n \ln(n)}}{(\frac{1}{4})^n} = \dfrac{5}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Il reste à rédiger le critère de négligeabilité (cf rédaction en classe), avec la même série géométrique que ci-dessus.

5. On remarque que $\sqrt{1-\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{-1}{2}\frac{1}{n}$, puisque $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

De plus pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \leq 0$ et $\sqrt{1-\frac{1}{n}} - 1 \leq 0$. Donc d'après le critère d'équivalence, les séries $\sum\limits_{n\geq 1} (\sqrt{1-\frac{1}{n}} - 1)$ et $\sum\limits_{n\geq 1} (\frac{-1}{2}\frac{1}{n})$ ont même nature, donc divergent puisque la série harmonique diverge.

7. Pour $n \geq 1$, $nn^{1/n} = ne^{\frac{1}{n}\ln(n)}$ avec $e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ d'après les croissances comparées, d'où $nn^{1/n} \sim n$, et finalement $\frac{1}{nn^{1/n}} \sim \frac{1}{n}$. Il reste à rédiger le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs (cf rédaction en classe).

8. Comme $\frac{\pi}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit d'après l'équivalent usuel que $\sin(\frac{\pi}{n}) \sim \frac{\pi}{n}$. Donc $\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(\frac{\pi}{n}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\pi}{n} = \pi\frac{1}{n^{3/2}}$.

Il reste à rédiger le critère d'équivalence : remarquer qu'il n'y a pas de problème de signe, car le sinus garde un signe constant sur $[0, pi]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(\frac{\pi}{n}) \geq 0$.

Comme la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, puisque $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, la série (8) converge donc.

9.* Ici, alternance de signe : donc soit utiliser le critère de négligeabilité, soit passer la valeur absolue.

Difficulté supplémentaire : $\ln n = o(n)$ donc $\frac{\ln(n)}{n^2} = o(\frac{1}{n})$. Donc cas douteux : certes, la série harmonique diverge, mais la notre est "plus petite" : donc sera-t-elle congergente ou non ? Il faut donc raffiner le raisonnement que l'on faisait habituellement.

Avec les croissances comparées on sait que le ln est vraiment négligeable par rapport à n, puisque il est même négligeable devant toutes les puissances de n : en particulier, on a donc $\ln(n) = o(\sqrt{n})$ et finalement $\frac{\ln(n)}{n^2} = o(\frac{\sqrt{n}}{n^2}) = o(\frac{1}{n^{3/2}})$. Le $(-1)^n$ ne change rien à la négligeabilité, donc finalement $(-1)^n\frac{\ln(n)}{n^2} = o(\frac{1}{n^{3/2}})$.

Il reste à rédiger le critère de négligeabilité.

Ou prendre les valeurs absolues $|(-1)^n\frac{\ln n}{n^2}| = \frac{\ln n}{n^2}$, et rédiger alors le critère de négligeabilité pour obtenir la convergence absolue de la série .. donc la convergence !

10. Problème de signe ! (le signe change selon n), donc passer par la cv absolue : or pour tout $n \geq 1$, d'après l'inégalité triangulaire, $|\frac{\cos(n)-\sin(n)}{n^2}| = \frac{|\cos(n)-\sin(n)|}{n^2} \leq \frac{|\cos(n)|+|\sin(n)|}{n^2} \leq \frac{1+1}{n^2} = 2\frac{1}{n^2}$. Il reste à appliquer le critère de comparaison pour les séries à termes positifs (cf rédaction en classe).

On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 1}^{n} |\frac{\cos(n)-\sin(n)}{n^2}|$ converge. D'où la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(n)-\sin(n)}{n^2}$ converge absolument donc converge.

Corrigé de la fin de l'exercice 3

f) Méthode la plus rapide : changement de variable $j = n+1$
en effet, alors $n(n+1)\frac{1}{5^n} = n(n+1)(\frac{1}{5})^n = (j-1)j(\frac{1}{5})^{j-1}$ terme général de la série géométrique dérivée 2e qui converge puisque $|\frac{1}{5}| < 1$. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} n(n+1)\frac{1}{5^n}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n+1)\frac{1}{5^n} = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} j(j-1)(\frac{1}{5})^{j-1} = \frac{2}{(1-1/5)^3}$.

Ou via l'astuce du n^2 :
$n(n+1)\frac{1}{5^n} = (n^2+2n)(\frac{1}{5})^n = (n(n-1)+2n)(\frac{1}{5})^n = (\frac{1}{5})^2[n(n-1)(\frac{1}{5})^{n-2}] + \frac{2}{5}[n(\frac{1}{5})^{n-1}]$ combinaison linéaire de 2 termes de séries convergentes puisque $|\frac{1}{5}| < 1$. Donc par linéarité, la série $\sum\limits_{n\geq 0} n(n+1)\frac{1}{5^n}$ converge
et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n+1)\frac{1}{5^n} = (\frac{1}{5})^2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(\frac{1}{5})^{n-2} + \frac{2}{5}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(\frac{1}{5})^{n-1} = (\frac{1}{5})^2 \frac{2}{(1-1/5)^3} + \frac{2}{5}\frac{1}{(1-1/5)^2}$.

i) Ne pas vous laisser influencer par le signe alterné de cette série ! ici, on ne cherche pas à appliquer un critère, mais à se ramener à des séries usuelles, donc le $(-1)^n$ n'est pas du tout un problème ! !
pour tout $n \geq 0$, $\frac{(-1)^n}{(n+2)!} = \frac{(-1)^{j-2}}{j!} = \frac{(-1)^j}{j!}$, en posant $j = n+2$. On reconnait le terme général d'une série exponentielle qui converge, donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$ converge et
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)!} = \sum\limits_{j=2}^{+\infty} (-1)^j j! = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j!} - \sum\limits_{j=0}^{1} \frac{(-1)^j}{j!}$ (relation de Chasles) $= e^{-1} - (1-1) = e^{-1}$.

indications pour les k et l : ne pas inventer une série du binôme ! Utiliser la définition des coefficients binomiaux, pour simplifier les factorielles ... et sortir tout ce qui est constant. Faire ensuite un changement de variable, pour se ramener à la série exponentielle.

k) pour $n \geq k$ (k fixé), $\binom{n}{k}\frac{a^k b^{n-k}}{n!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{a^k b^{n-k}}{n!} = \frac{a^k}{k!}[\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}] = \frac{a^k}{k!}[\frac{b^j}{j!}]$ en posant le chgt de variable $j = n-k$. On reconnaît une CL du terme général de la série exponentielle qui converge. Donc la série $\sum\limits_{n\geq k} \binom{n}{k}\frac{a^k b^{n-k}}{n!}$ converge et $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}\frac{a^k b^{n-k}}{n!} = \frac{a^k}{k!}\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \frac{b^j}{j!} = \frac{a^k}{k!}e^b$. (Bien penser à changer les bornes au moment du chgt de variable dans la somme !).

l) Pour $n \geq k$, $\frac{\binom{n}{k}}{n!} = \frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!}[\frac{1^j}{j!}]$ en posant $j = n-k$ (et avec l'astuce $1 = 1^j$!). Même blabla qu'au k). Conclure que la série converge et que $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n!} = \frac{}{k!}\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \frac{1^j}{j!} = \frac{1}{k!}e^1$.

m) Pour tout $n \geq 0$, $\frac{n^2+n+1}{n!} = \frac{n(n-1)+2n+1}{n!} = \frac{n(n-1)}{n!} + 2\frac{n}{n!} + \frac{1}{n!}$.
Or pour tout $n \geq 2$, $\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} = \frac{1^k}{k!}$ (en posant $k = n-2$), T.G. d'une série exponentielle CV.
Pour tout $n \geq 1$, $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1^j}{j!}$ (en posant $j = n-1$), T.G. d'une série exponentielle CV.
Pour tout $n \geq 0$, $\frac{1}{n!} = \frac{1^n}{n!}$, T.G. d'une série exponentielle CV.
Donc par linéarité, la série $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 0 + 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} + 0 + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k!} + 2\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \frac{1^j}{j!} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1^n}{n!} = e^1 + 2e^1 + e^1 = 4e$

Corrigé de l'exercice 4

1. Posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Alors, $S_n + T_n = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{\lambda^k}{k!}$, et en remarquant que $(-1)^{2k} = 1$ et $(-1)^{2k+1} = -1$, on peut réécrire : $S_n - T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k}\lambda^{2k}}{(2k)!} + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k+1}\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k\lambda^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{(-\lambda)^k}{k!}$.
   Comme la série exponentielle converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient : $S_n + T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\lambda}$ et $S_n - T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}$.
   Finalement, $S_n = \frac{1}{2}(S_n + T_n) + \frac{1}{2}(S_n - T_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(e^{\lambda} + e^{-\lambda})$.

   Par définition, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$ converge et la somme de la série est : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}(e^{\lambda} + e^{-\lambda})$.
2. $4^n = (2^2)^n = 2^{2n}$ donc c'est la question 1 avec $\lambda = 2$.

Corrigé du début de l'exercice 6

Même exercice que celui du cours :

Monotonie de la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k = \sum_{k=2n+1}^{2n+2}(-1)^k a_k$ (relation de Chasles) $= (-1)^{2n+1}a_{2n+1} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0$
car la suite (a_n) étant décroissante, $a_{2n+1} \leq a_{2n+2}$.
De même, la suite (S_{2n+1}) est croissante, et $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque la suite (a_n) tend vers 0.
Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont bien adjacentes.
Donc (théorème, chapitre suite), elles convergent vers la même limite.
Donc (un entier étant soit pair soit impair), la suite (S_n) converge vers cette même limite.
Donc (par définition), la série de terme général $(-1)^n a_n$ (notée $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$), converge.

Applications :

1. Il suffit de poser $a_n = \frac{1}{\ln n}$ pour tout $n \geq 2$ et de vérifier les hypothèses sur la suite (a_n).
La suite a est bien décroissante puisque $1 < n \leq n+1 \Rightarrow \ln(n) \leq \ln(n+1)$ (par croissance du ln) $\Rightarrow \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{\ln(n+1)}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.
Et $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (pas de FI). Donc d'après le raisonnement précédent, la série de terme général $(-1)^n a_n = (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ converge.

2. On réécrit $u_n = \frac{1}{n^2} + (-1)^n \frac{1}{n}$. La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), et la série alternée $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1}{n}$ converge (cas d'application de la première partie de l'exercice en posant $a_n = \frac{1}{n}$ et en vérifiant que la suite (a_n) est bien décroissante et convergente vers 0).
Donc par linéarité, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge bien.

Corrigé de l'exercice 7

1. Soit $k \geq 2$. Alors $k \leq x \leq k+1 \Rightarrow 0 < \ln(k) \leq \ln(x) \leq \ln(k+1)$ donc par produit de ces inégalités, $0 < k\ln(k) \leq x\ln x \leq (k+1)\ln(k+1)$ et par passage à l'inverse : $\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \frac{1}{x\ln x} \leq \frac{1}{k\ln k}$. Par croissance de l'intégrale ($k \leq k+1$), $\int_k^{k+1}\frac{1}{x\ln x}dx \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{k\ln k}dx = \frac{1}{k\ln k}\int_k^{k+1}1dx = \frac{1}{k\ln k}$.
2. Par somme des inégalités obtenues au 1. pour k variant de 2 à n, on obtient $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} \geq \sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x\ln x}dx = \int_2^{n+1}\frac{1}{x\ln x}dx$ d'après la relation de Chasles.
Or $\int_2^{n+1}\frac{1}{x\ln x}dx = \int_2^{n+1}\frac{1}{x}\frac{1}{\ln x}dx$ [forme u'/u] $= [\ln(|\ln(x)|)]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$ d'où le résultat.
3. Comme $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par comparaison, $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc la série diverge.

Corrigé exercice 8 : question préliminaire

Rappel : si $a \geq 0$, $|X| \leq a \Leftrightarrow -a \leq X \leq a$. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Il faut donc montrer ici que : $-(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2) \leq xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.
On va montrer chaque inégalité séparément. Commençons par montrer que $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

Brouillon : partons du résultat, et regardons d'où çà sort ! Or $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2xy) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2}(x-y)^2$ ce qui est vrai ! Comme j'ai bien marqué des équivalences, j'ai montré le résultat voulu. Maintenant, on préfère quand vous ne partiez pas du résultat, donc voici une proposition de rédaction.
On sait que $(x-y)^2 \geq 0$, d'où $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$ soit encore $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Il reste à multiplier par $\frac{1}{2}$, pour obtenir : $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq xy$..

De même, on a $(x+y)^2 \geq 0$ d'où $x^2 + y^2 + 2xy \geq 0$, d'où $2xy \geq -x^2 - y^2$ et enfin $xy \geq -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$.

Corrigé fin de l'exercice 10

4.(a) Récurrence un peu technique : bien écrire ce à quoi vous devez aboutir ... pour y parvenir !
n=1 $\frac{4^1}{4\times1\times\binom{2}{1}} = \frac{1}{2}$ car $\binom{2}{1} = 2$ et par hypothèse $u_1 = \frac{1}{2}$.
Supposons pour un certain entier $n \geq 1$ que $u_n = \frac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$ et montrons que $u_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{4(n+1)\binom{2n+2}{n+1}}$.
On sait $u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}u_n$ d'où par H.R. $u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$.
Or $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ et $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$.
On commence par développer le coefficient binomial dans u_{n+1} puis on fait apparaître ce qu'il nous faut : $u_{n+1} = \frac{2n\times4^n\times n!n!}{4n(2n+1)(2n)!} \times \frac{2n+2}{2n+2} \times \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2n\times4^n\times(n+1)!(n+1)!}{4n(2n+2)!} \times (2n+2) \times \frac{1}{(n+1)(n+1)} = \frac{2n\times4^n}{4n\binom{2n+2}{n+1}} \times \frac{2(n+1)}{(n+1)(n+1)}$.
Il reste à simplifier tout ce qui peut se simplifier : $u_{n+1} = \frac{2\times2\times4^n}{4(n+1)\binom{2n+2}{n+1}}$ d'où le résultat.
On pouvait bien sûr sauter des étapes, ou mener les calculs différemment ....
Conclure.

4.(b) Méthode 1 : on fait le quotient ... et on vérifie que la limite est 0 : $\frac{\frac{4^n}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{4^n}{n\binom{2n}{n}} = 4u_n$ d'après la question (a).
Or d'après la question 3., $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\frac{\frac{4^n}{n}}{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Méthode 2 (se rédige moins bien, mais permet de voir d'où vient le résultat) : d'après 3. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où d'après 4.(a) $\frac{4^n}{4n\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui se réécrit : $4^n = o(4n\binom{2n}{n})$ soit encore $\frac{4^n}{n} = o(4\binom{2n}{n})$, et comme les constantes multiplicatives n'ont pas d'importance ... on en déduit le résultat voulu.

Corrigé de l'exercice 11

1. Méthode 1 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 \frac{1-(x^3+1)}{(x^3+1)^{n+1}}dx = -\int_0^1 \frac{x^3}{(x^3+1)^{n+1}}dx \leq 0$ car pour tout $x \in [0,1]$, $\frac{x}{(x^3+1)^{n+1}} \geq 0$ et $0 < 1$. Puis par un raisonnement analogue, $J_n \geq 0$.
Donc la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, décroissante et minorée par 0 converge vers un réel $\ell \geq 0$.
Méthode 2 par construction : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $x^3 + 1 \geq 1$ d'où $(x^3+1)^{n+1} \geq (x^3+1)^n$ et $0 \leq \frac{1}{(x^3+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{(x^3+1)^n}$. Par croissance de l'intégrale $(0 < 1)$, on obtient $0 \leq J_{n+1} \leq J_n$.
Conclure alors comme ci-dessus.
2. IPP sur J_n : on pose $u' = 1$ et $v = (x^3+1)^{-n}$. Alors $u = x$ et $v' = -n(3x^2)(x^3+1)^{-(n+1)}$. u, v sont de classe C^1 sur $[0,1]$ d'où $J_n = [x(x^3+1)^{-n}]_0^1 + 3n\int_0^1 \frac{x^3}{(x^3+1)^{n+1}}dx = \frac{1}{2^n} + 3n\int_0^1 \frac{x^3}{(x^3+1)^{n+1}}dx$.
Il reste à déterminer l'intégrale obtenue :
soit reconnaître directement $J_n - J_{n+1}$ au vu de la question 1. (si méthode 1)
soit s'aider de l'énoncé, partir de $J_n - J_{n+1}$, et reconnaître l'intégrale pour conclure.
soit écrire $x^3 = (x^3+1) - 1$ d'où
$\int_0^1 \frac{x^3}{(x^3+1)^{n+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^3+1}{(x^3+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x^3+1)^{n+1}}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x^3+1)^n}dx - \int_0^1 \frac{1}{(x^3+1)^{n+1}}dx = J_n - J_{n+1}$.
Ccl : $J_n = \frac{1}{2^n} + 3n(J_n - J_{n+1})$ d'où le résultat.
3. a) Comme la suite (J_n) converge, la série $\sum\limits_{n\geq1}(J_n - J_{n+1})$ converge :
en effet pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{N} J_n - J_{n+1} = J_1 - J_{N+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} J_1 - \ell$.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3n \geq 1$ donc $3n2^n \geq 2^n$ et $0 \leq \frac{1}{3n2^n} \leq (\frac{1}{2})^n$. Comme la série géométrique de raison 1/2 converge, par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{1}{3n2^n}$ converge.
b) Si $J_n \to \ell \neq 0$ alors $J_n \sim \ell$ et $\frac{J_n}{3n} \sim \frac{\ell}{3}\frac{1}{n}$.
Or la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, donc par CL, la série de terme général $\frac{\ell}{3n}$ diverge, et d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{J_n}{3n}$ diverge.
c) Si on récapitule : d'après 2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{J_n}{3n} = \frac{1}{3n2^n} + (J_n - J_{n+1})$
et par a), les séries de terme général $\frac{1}{3n2^n}$ et $(J_n - J_{n+1})$ convergent. Donc par linéarité (somme de deux séries convergentes), on obtient que la série de terme général $\frac{J_n}{3n}$ converge.
Si $\ell \neq 0$, on arrive donc à une contradiction avec la question b).
Donc $\ell = 0$.

Corrigé de l'exercice 12

1. (a) C'est la définition de la limite qui donne le résultat. Comme $\lambda < a$, on sait qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ seront inférieurs (ou égaux) à a (condition pour "s'approcher" de λ !!) Bref, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a$. Ce qui donne (comme $u_n > 0$), $u_{n+1} \leq au_n$.
(b) Du (a), une petite récurrence donne : pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq (a)^{n-n_0}u_{n_0}$.
Posons v la suite définie par : pour tout n, $v_n = a^n \times \frac{u_{n_0}}{a^{n_0}}$. Par linéarité, la série de terme général v_n converge, puisque la série géométrique de terme général a^n converge $(0 \leq a < 1)$. On a pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge.

2. Poser a tel que $\lambda > a > 1$. Comme $\lambda > a$, on sait qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ seront supérieurs (ou égaux) à a (condition pour "s'approcher" de λ !!) Bref, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq a$. Ce qui donne (comme $u_n > 0$), $u_{n+1} \geq a u_n$.
Même petite récurrence .... même critère de comparaison (mais dans l'autre sens), avec divergence de la série géométrique puisque $a > 1$.
3. Poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. La série de terme général u_n diverge.

   Poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n^2}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Pourtant la série de terme général u_n converge.
   Donc dans le cas $\lambda = 1$, on ne peut pas conclure a priori ! Tout peut arriver ....
4. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = ... = (\frac{n}{n+1})^n = (1 - \frac{1}{n+1})^n = e^{n\ln(1-1/(n+1))}$.
   Or $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $n\ln(1 - 1/(n+1)) \sim n(-\frac{1}{n+1}) \sim \frac{-n}{n} = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$ donc par composition des limites (attention de ne pas composer les équivalents !!), $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{n\ln(1-1/(n+1))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$. Comme $e^{-1} < 1$, on obtient bien d'après 1. la convergence de la série de terme général u_n.

Corrigé de l'exercice 13

1. (a) Remarquer que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, puisque $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{a_n}$. On en déduit que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{N+1}$ [somme télescopique] $\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge et sa somme vaut 1 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 1$.

   (b) $a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)[2n+4] = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.
   D'où $u_n = \frac{n}{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)} = \frac{3}{(n+1)(n+2)}$.

   (c) On utilise la même astuce qu'au a) pour se ramener à une somme télescopique : $u_n = 3[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}]$.
   D'où $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} u_n = 3\sum_{n=2}^{N+1} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$. La série de terme général u_n converge et sa somme vaut $\frac{3}{2}$: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}$. Comme $\frac{3}{2} < 2$, on obtient bien $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

2. (a) Au choix :
```
def fact(n):
    return np.prod(np.arange(1,n+1))
```
   Ou avec une boucle for
```
def fact(n):
    c=1
    for k in range(1,n+1):
        c=c*k
    return c
```
   Puis le script :
```
n=int(input('entrer un entier non nul'))
denom=1
for k in range(2,n+1):
    denom = denom + fact(k)
u=n/denom
print(u)
```
   (b) La série exponentielle de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc en particulier pour $x = 1$. (On rappelle que la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes).
   De plus (relation de Chasles) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - 1 = e - 1$.

   (c) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1! + 2! + ... + n! \geq n!$ d'où $u_n \leq \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$.

   (d) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}$ et la série de terme général $\frac{1}{(n-1)!}$ converge (au besoin, faire un changement d'indice $j = n - 1$: $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{j!} = \frac{1^j}{j!}$ et on reconnaît le terme général de la série exponentielle).
   Le critère de comparaison pour les séries à termes positifs donne que la série de terme général u_n converge, et que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$. Or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e$, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq e$.

   On conclut en remarquant que $e \leq 2e - 2 = 2(e-1) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

Corrigé de l'exercice 14

1. Par récurrence : *hérédité*. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel u_n existe et $u_n \geq 1$. Alors comme $n \neq 0$ et $u_n \neq 0$, $n^2 u_n \neq 0$ donc u_{n+1} existe, et comme $n^2 u_n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n \geq 1$. Conclure.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2 u_n} \geq 0$ d'après 1. De plus, comme $u_n \geq 1$, $n^2 u_n \geq n^2$ et $\frac{1}{n^2 u_n} \leq \frac{1}{n^2}$.

   (b) On applique le critère de comparaison pour les séries à termes positifs. Comme la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann, $\alpha = 2 > 1$), d'après le 2.(a), on en dédéuit que la série $\sum\limits_{n \geq 1} v_n$ converge.

   (c) Or la série des v_n est télescopique : posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$. On sait d'après 2.(b) qu'il existe un réel L tel que $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} L$. Par ailleurs, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_1 - u_{n+1}$ (somme télescopique). D'où $u_{n+1} = u_1 - S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - L \in \mathbb{R}$. Donc la suite (u_n) converge bien, vers le réel $\ell = 1 - L$.