Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Suites

Corrigé exercice 2 :

1. soit par récurrence (le résultat est donné dans l'énoncé), soit (si le cours a déjà été fait) reconnaître une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Comme $-1 < \frac{-1}{3} < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{1}{3})^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2. On remarque que le terme $(-\frac{1}{3})^n$ est de signe alterné mais que $|(-\frac{1}{3})^n| = (\frac{1}{3})^n$ est décroissant en n ; on peut également regarder $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{4}{3}$, $u_2 = \frac{8}{9}$ .... Cela fait comme un "entonnoir" autour de 1. Donc l'ensemble E est non seulement borné entre 0 et 4/3, mais en plus ce sont un minimum et un maximum, donc également une borne inférieure et supérieure.

Corrigé exercice 3 :

u est bornée donc il existe C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq C$ (comme on ne connait pas le signe de v_n, il vaut mieux utiliser les valeurs absolues). D'où $|u_nv_n| = |u_n||v_n| \leq C|v_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

En effet, comme $|v_n| \geq 0$, $|u_n| \leq C \Rightarrow |u_n||v_n| \leq C|v_n|$, et c'est cette étape qui aurait bloqué si on avait regardé $m \leq u_n \leq M$ car on n'aurait pas pu encadrer u_nv_n sans connaître le signe de v_n (qui peut changer à chaque n....).

Corrigé exercice 4

b : cela revient à pour tout $n \geq 1$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$ suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ partant de b_1 :
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (\frac{1}{2})^{n-1} \times 3$.

c : cela revient à pour tout $k \geq 1$, $c_{k+1} = c_k + 3$ suite arithmétique de raison 3 partant de c_1 :
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = (n-1)3 + 10$.

u : cela revient à pour tout $j \geq 0$, $u_{j+1} = \frac{2}{3}u_j + \frac{1}{3}$, suite arithmético-géométrique. Résoudre l'équation en α : $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \alpha = 1$ puis poser la suite auxiliaire définie par $v_n = u_n - 1$. On sait qu'elle est alors géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$ et $u_n = v_n + 1 = 1$.

f : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = -\frac{1}{2}f_{n+1} + \frac{1}{2}f_n$ suite récurrente linéaire d'ordre 2. Eq caractéristique : $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$.
$\Delta = \frac{9}{4}$ donc deux racines -1 et $1/2$. Donc il existe un unique couple (a, b) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = a(-1)^n + b(\frac{1}{2})^n$.
Il reste à trouver les constantes a et b en résolvant le système $\begin{cases} a(-1)^0 + b(\frac{1}{2})^0 & = f_0 \\ a(-1)^1 + b(\frac{1}{2})^1 & = f_1 \end{cases}$ càd $\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + \frac{1}{2}b = 1 \end{cases}$

On trouve $b = \frac{4}{3}$ et $a = -\frac{1}{3}$. Conclure.

h : même si le terme en h_{p+1} manque, c'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (avec le b correspondant nul).
Eq caract : $x^2 = 2$. Deux racines$\pm\sqrt{2}$. Donc il existe un unique couple (a, b) tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$h_p = a(-\sqrt{2})^p + b(\sqrt{2})^p$. On résout le système correspondant : $\begin{cases} a + b & = 1 \\ -\sqrt{2}a + \sqrt{2}b & = 1 \end{cases}$.

Finalement, $b = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$ et $a = 1 - \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$.
Conclure.

Corrigé exercice 5 *pour s'entraîner*

Méthode : on commence par regarder les premiers termes $u_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $u_3 = \sqrt{\frac{7}{4}}$, $u_4 = \sqrt{\frac{15}{8}}$, $u_5 = \sqrt{\frac{31}{16}}$.
On devine alors que u_n s'écrit sous la forme d'une racine d'une fraction. Au dénominateur, on reconnait une puissance de 2, et au numérateur une puissance de 2 -1.
Conjecture : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{\dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}}}$.
Il reste à montrer ce résultat par récurrence !
Pour $n = 1$; ok car $2^0 = 1$.
Puis si $u_n = \sqrt{\dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}}}$, alors par définition de la suite, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} = \sqrt{\dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n}} = \sqrt{\dfrac{2 \times (2^n - 1)}{2 \times 2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n}} = \sqrt{\dfrac{2^{n+1} - 2}{2^n} + \dfrac{1}{2^n}} = \sqrt{\dfrac{2^{n+1} - 1}{2^n}}$. Il reste à conclure.

Corrigé exercice 6

Attention de bien écrire v_{n+1} ! remplacer tous les n par $n + 1$ dans l'expression de v_n ...

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}} = \frac{2u_n}{3^{n+1}} + \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\frac{u_n}{3^n} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}$.
Donc la suite v est arithmético-géométrique.
On résout $\alpha = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\alpha = 2\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$, et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - 1$. On sait que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 1 = \frac{u_0}{2^0} - 1 = -1$.
D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -(\frac{2}{3})^n$, et par enchaînement, $v_n = w_n + 1 = 1 - (\frac{2}{3})^n$
puis $u_n = v_n \times 3^n = 3^n(1 - (\frac{2}{3})^n) = 3^n - 2^n$.
Alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} 3^k - \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k$ par linéarité $= \frac{1-3^{n+1}}{1-3} - \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$ car $3 \neq 1$ et $2 \neq 1$.

Corrigé exercice 8

1. Ici la suite u est définie par une relation de récurrence d'ordre 2 (u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n) : il va donc falloir mettre en place un raisonnement par récurrence double.
Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, "u_n existe et $u_n > 0$".
Pour $n = 0$ et $n = 1$, par hypothèse on a $u_0 = 1 > 0$ et $u_1 = 2 > 0$.
Supposons maintenant que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$ ET u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$.
Montrons que u_{n+2} existe et $u_{n+2} > 0$.
Or $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ existe car par H.R. $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$ donc $u_n u_{n+1} \geq 0$.
De plus, comme $u_n u_{n+1} > 0$, par stricte croissance de $\sqrt{\ }$, $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} > \sqrt{0} = 0$.
Il reste à conclure !

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \ln(\sqrt{u_n u_{n+1}}) = \frac{1}{2}\ln(u_n u_{n+1}) = \frac{1}{2}\ln(u_n) + \frac{1}{2}\ln(u_{n+1}) = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}v_{n+1}$.
On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
on résout l'équation $x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$. On trouve $\Delta = \frac{9}{4}$, d'où deux racines $-\frac{1}{2}$ et 1.
Donc $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \lambda(-\frac{1}{2})^n + \mu$.
On résout le système suivant pour trouver λ et μ : (attention, la suite concernée est v, donc il faut bien prendre les valeurs de v_0 et v_1, que l'on calcule : $v_0 = \ln(u_0) = 0$ et $v_1 = \ln(u_1) = \ln(2)$)
$\begin{cases} \lambda + \mu & = 0 \\ -\frac{1}{2}\lambda + \mu & = \ln(2) \end{cases} \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3}\ln(2) \\ \mu = -\frac{2}{3}\ln(2) \end{cases}$
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{2}{3}\ln(2)(-\frac{1}{2})^n - \frac{2}{3}\ln(2)$ et $u_n = e^{v_n} = exp(\frac{2}{3}\ln(2)(-\frac{1}{2})^n - \frac{2}{3}\ln(2))$

Corrigé exercice 9

1. Par Récurrence : bien se souvenir que l'on montre en même temps les deux parties de la question. Bref, on va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, "u_n existe et $1 \leq u_n < 2$".
Pour $n = 1$, $u_1 = 1$ donc u_1 existe et $1 \leq u_1 < 2$
Supposons maintenant que u_n existe et $1 \leq u_n < 2$. Montrons que u_{n+1} existe et $1 \leq u_{n+1} < 2$.
Or $u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$ existe, puisque par H.R., $u_n < 2$ donc $u_n - 3 < 0$ et $u_n - 3 \neq 0$.
Il reste à montrer que $1 \leq u_{n+1} < 2$.
Première tentative vouée à l'échec, la construction ...
Donc on réessaie avec la deuxième méthode pour montrer une inégalité à savoir "faire la différence, et si besoin poser une fonction". Ici, faire la différence suffira.
Bref, on regarde $2 - u_{n+1} = \frac{2(u_n-3)-(u_n-4)}{u_n-3} = \frac{u_n-2}{u_n-3} \geq 0$ car $u_n - 2 \leq 0$ et $u_n - 3 \leq 0$.
De même, $u_{n+1} - 1 = ... > 0$.
Remarquer que tout sort bien finalement, mais effectivement, trouver la méthode n'était pas facile !!
Après tout çà, ne pas oublier de conclure la récurrence !

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n existe bien puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 2$ d'après 1.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-2} - \frac{1}{u_n-2} = \frac{1}{\frac{u_n-4}{u_n-3}-2} - \frac{1}{u_n-2} = \frac{1}{\frac{-u_n+2}{u_n-3}} - \frac{1}{u_n-2} = \frac{u_n-3}{-u_n+2} + \frac{1}{2-u_n}$
$= \frac{u_n-2}{2-u_n} = -1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = v_n - 1$ et la suite v est arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_1 = \frac{1}{u_1-2} = -1$. Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (n-1) \times (-1) + (-1) = -n$.
Il reste à renverser l'équation $\frac{1}{u_n-2} = -n$ pour trouver $u_n = 2 - \frac{1}{n}$.

Corrigé exercice 11 : question 3.

Montrons que la suite v est géométrique : donc on part de v_{n+1} .... jusqu'à faire apparaître v_n.
Attention de bien écrire v_{n+1} !
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors en remplaçant n par $n+1$ dans l'expression de v_n, on trouve :
$v_{n+1} = u_{n+1}\sin(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = u_n\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})\sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.
Or $v_n = u_n\sin(\frac{\pi}{2^n})$. Il faut donc arriver à transformer le $\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})\sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ en $\sin(\frac{\pi}{2^n})$. Une petite formule de trigo ?

Rappel : $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ donc $\cos(a)\sin(a) = \frac{1}{2}\sin(2a)$.

On remplace : $v_{n+1} = u_n\frac{1}{2}\sin(2\frac{\pi}{2^{n+1}}) = \frac{1}{2}u_n\sin(\frac{\pi}{2^n}) = \frac{1}{2}v_n$.
Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géometrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_2 = u_2\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Donc pour tout $n \geq 2$, $v_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-2} = (\frac{1}{2})^{n-1}$. En particulier, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or $u_n = \frac{v_n}{\sin(\frac{\pi}{2^n})}$: FI 0/0 donc il faut aller plus loin, avec l'expression de v_n trouvée : $u_n = \frac{(\frac{1}{2})^{n-1}}{\sin(\frac{\pi}{2^n})}$. On veut utiliser la limite usuelle en $x = \frac{\pi}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ à savoir : $\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin(\frac{\pi}{2^n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
On fait apparaître cette quantité dans u_n et on compense : $u_n = \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin(\frac{\pi}{2^n})} \times \frac{2}{\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi} \times 1 = \frac{2}{\pi}$.
Ou via les équivalents : comme $\frac{\pi}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\sin(\frac{\pi}{2^n}) \sim \frac{\pi}{2^n}$ d'où par quotient $u_n \sim \frac{(\frac{1}{2})^{n-1}}{\frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{2^n}{\pi} = \frac{2}{\pi}$.

Corrigé exercice 12

1. Il faut combiner les deux équations, en partant de x_{n+2}.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la ligne 1,(qui est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc en particulier en $n+1$), $x_{n+2} = -2x_{n+1}+y_{n+1}$ et d'après la ligne 2, on en déduit, $x_{n+2} = -2x_{n+1} + 2x_n - 3y_n$. Le y_n nous embête, car on ne veut que des termes en x : on le remplace via la ligne 1 ($y_n = x_{n+1} + 2x_n$).
   D'où, $x_{n+2} = -2x_{n+1} + 2x_n - 3(x_{n+1} + 2x_n)$ et finalement on trouve : $x_{n+2} = -5x_{n+1} - 4x_n$.
2. On résout l'équation caractéristique : $x^2 = -5x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$. $\Delta = 9$ donc deux racines -4 et -1.
   Donc il existe un unique couple de réels (a, b) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = a(-4)^n + b(-1)^n$.
   Or $x_0 = 2$ et $x_1 = -2x_0 + y_0 = -5$. Il reste à résoudre le système $\begin{cases} a+b & = 2 \\ -4a-b & = -5 \end{cases}$
   Ce qui donne $b = 1$ et $a = 1$.
   Finalement : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (-4)^n + (-1)^n$.
   Expression de y_n : il suffit d'utiliser la ligne 1. $y_n = x_{n+1} + 2x_n = (-4)^{n+1} + (-1)^{n+1} + 2((-4)^n + (-1)^n) = (-4)^{n+1} + 2(-4)^n + (-1)^{n+1} + 2(-1)^n = (-4)^n[-4 + 2] + (-1)^n[-1 + 2] = -2(-4)^n + (-1)^n$.

Corrigé exercice 13

Pour u et v, remarquer qu'il y a un pb d'existence de limite (et non de FI !) : penser à un encadrement ...
Pour w et t, le premier problème vient de la racine carrée : penser à la quantité conjuquée (cf feuille Calcul, partie $\sqrt{\ }$)

Corrigé exercice 14 : par encadrement

Rappel : pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lfloor y \rfloor \le y < \lfloor y \rfloor + 1$, donc $y - 1 \le \lfloor y \rfloor \le y$. Bref, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $kx - 1 \le \lfloor kx \rfloor \le kx$, donc par somme

$$\frac{x - 1 + 2x - 1 + 3x - 1 + ... + nx - 1}{n^2} \le \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + ... + \lfloor nx \rfloor}{n^2} \le \frac{x + 2x + 3x + ... + nx}{n^2}$$

Il reste à simplifier les membres de gauche et de droite :
$D_n = \frac{x+2x+3x+...+nx}{n^2} = x\frac{1+2+3+..+n}{n^2} = x\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = x\frac{n+1}{2n} \sim x\frac{n}{2n} = x\frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2}$.
De même pour l'autre côté : $\frac{x-1+2x-1+3x-1+...+nx-1}{n^2} = D_n - \frac{n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2}$.
Il reste à conclure avec le théorème d'encadrement.

Corrigé exercice 15

Il y a beaucoup de solutions pour chaque question ... j'ai essayé de choisir les plus simples possibles !

1. (a) $u_n = n^2$, $v_n = -n$
   (b) $u_n = n$, $v_n = -n^2$
   (c) $u_n = n + 1$, $v_n = -n$
   (d) $u_n = n + (-1)^n$ (on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \ge n - 1$ donc par comparaison, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$), $v_n = -n$
2. (a) $u_n = n^2$, $v_n = \frac{1}{n}$
   (b) $u_n = n^2$, $v_n = -\frac{1}{n}$
   (c) $u_n = n$, $v_n = \frac{1}{n^2}$
   (d) $u_n = n$, $v_n = \frac{1}{n}$
   (e) $u_n = n$, $v_n = (-1)^n\frac{1}{n}$: en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{n} \le v_n \le \frac{1}{n}$ donc par encadrement on a bien $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Corrigé exercice 16 Supposons qu'il existe un rang n_0 pour lequel $u_{n_0} \ge 1$. Alors par stricte croissance de la suite, $u_{n_0+1} > 1$, et plus généralement, pour tout $k \ge n_0 + 1$, $u_k \ge u_{n_0+1}$. Par passage à la limite dans les inégalités larges, en notant ℓ la limite de la suite, on trouve : $\ell \ge u_{n_0+1}$ d'où $\ell > 1$.
Contradiction.
Remarque : le passage délicat est de penser à regarder le terme d'après, car si jamais $u_{n_0} = 1$, on obtient pour tout $k \ge n_0$, $u_k \ge 1$ donc $\ell \ge 1$, ce qui ne suffit pas pour avoir la contradiction avec $\ell = 1$!

Corrigé exercice 18

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v_n^2 - v_n = \frac{1+v_n^2-2v_n}{2} = (v_n - 1)^2 \ge 0$.
   Sans voir l'astuce de l'identité remarquable, il aurait fallu étudier le signe du trinôme $\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2$: $\Delta = ... = 0$ donc le trinôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2 \ge 0$. On conclut en prenant $x = v_n \in \mathbb{R}$.
   Donc la suite v est croissante.
2. Raisonnons par l'absurde : supposons que la suite v est majorée.
   Comme elle est de plus croissante, on en déduit qu'elle converge. Notons ℓ sa limite. Alors par passage à la limite dans la relation de récurrence, on obtient l'équation sur ℓ suivante : $\ell = \frac{1}{2}(1 + \ell^2)$. Il reste à la résoudre.
   Or $\ell = \frac{1}{2}(1 + \ell^2) \Leftrightarrow 2\ell = 1 + \ell^2 \Leftrightarrow 1 + \ell^2 - 2\ell = 0 \Leftrightarrow (\ell - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 1$.
   Or la suite v est croissante et $v_0 = 2$, donc la limite ne peut être égale à 1. Contradiction.
   Donc la suite v n'est pas majorée, et comme elle est croissante, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Corrigé exercice 19

1. question corrigée en classe
2. D'après 1., on sait déjà que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{a} \geq 0$. Il reste donc à montrer le second membre. On fait la différence :
$\frac{(u_n-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}} - (u_{n+1} - \sqrt{a}) = \frac{(u_n-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}} - \frac{(u_n-\sqrt{a})^2}{2u_n}$ en reprenant le calcul fait dans la récurrence de la question 1.
$= \frac{(u_n-\sqrt{a})^2}{2}(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{u_n}) = \frac{(u_n-\sqrt{a})^2}{2} \times \frac{u_n-\sqrt{a}}{\sqrt{a}u_n} \geq 0$ d'après 1.
On aurait aussi pu faire une construction en partant de $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n-\sqrt{a})^2}{2u_n}$ et en remarquant qu'il n'y avait qu'au dénominateur où il y avait un petit changement : donc on part de $u_n \geq \sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow$ .....

Attention, la dernière partie de la question est difficile. A ne faire que si vous êtes à l'aise.
L'inégalité que vous venez de montrer est vraie pour tout n, donc si on regarde en $n = 1$, puis en $n = 2$:
$0 \leq u_1 - \sqrt{a} \leq \frac{(u_0-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$ (*)
$0 \leq u_2 - \sqrt{a} \leq \frac{(u_1-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$ (**). Mais (*) donne au carré : $0 \leq (u_1 - \sqrt{a})^2 \leq \frac{(u_0-\sqrt{a})^4}{(2\sqrt{a})^2}$.
D'où en le réinjectant dans (**) : $0 \leq u_2 - \sqrt{a} \leq \frac{\frac{(u_0-\sqrt{a})^4}{(2\sqrt{a})^2}}{2\sqrt{a}} = \frac{(u_0-\sqrt{a})^4}{(2\sqrt{a})^3)}$ (***).
Et on continue ainsi :
$0 \leq u_3 - \sqrt{a} \leq \frac{(u_2-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$ donc si on élève au carré (***) $0 \leq (u_2 - \sqrt{a})^2 \leq \frac{(u_0-\sqrt{a})^8}{(2\sqrt{a})^6)}$ et qu'on la réinjecte :
on trouve $0 \leq u_3 - \sqrt{a} \leq \frac{\frac{(u_0-\sqrt{a})^8}{(2\sqrt{a})^6)}}{2\sqrt{a}} = \frac{(u_0-\sqrt{a})^8}{(2\sqrt{a})^7}$.
Bref, par itération, on devine que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq \dfrac{(u_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(2\sqrt{a})^{2^n-1}}$.
Pour être rigoureux, il faudrait maintenant montrer ce résultat par récurrence.

Corrigé exercice 24 : le 2e
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
$1 \leq k \leq n \Rightarrow 1 + n^2 \leq k + n^2 \leq n + n^2 \Rightarrow \sqrt{1 + n^2} \leq \sqrt{k + n^2} \leq \sqrt{n + n^2}$, par croissance de $\sqrt{}$ sur $\mathbb{R}^+$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$ par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*_+$.
D'où, par sommation de ces encadrements pour k variant de 1 à n :
$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$, et en remarquant les sommes constantes
$\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \geq u_n \geq \frac{n}{\sqrt{n+n^2}}$.

Il reste à déterminer les limites quand $n \to +\infty$ des membres de gauche et droite.
Or $\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2(1/n^2+1)}} = \frac{n}{\sqrt{n^2}\sqrt{1/n^2+1}} = \frac{n}{|n|\sqrt{1/n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1/n^2+1}}$ (car $n \geq 0$) $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Et en factorisant de même, on trouve : $\frac{n}{\sqrt{n+n^2}} = \frac{n}{n\sqrt{1/n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1/n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
D'après le théorème d'encadrement, on peut en conclure que la suite (u_n) converge vers 1.

Corrigé exercice 25

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+(n+1)} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \sum\limits_{j=2}^{n+2} \frac{1}{j+n} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ en posant dans la première somme $j = k + 1$
$= \sum\limits_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k+n} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ (la lettre j était muette) ce qui permet de voir le téléscopage $= (\frac{1}{(n+1)+n} + \frac{1}{(n+2)+n}) - \frac{1}{1+n} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$. Il reste à mettre au même dénominateur pour trouver le signe.
Si on est malin, on remarque que $2n + 2 = 2(n + 1)$ ce qui permet de n'avoir plus que 2 fractions (sinon, les calculs sont plus lourds, mais le résultat sort aussi !) $= \frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{2n+1} = ... = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \geq 0$ La suite est croissante.
Pour avoir sa nature, il faut voir si on peut la majorer (suite alors convergente) ou non (suite alors divergente vers $+\infty$). On utilise la technique d'encadrement vue au-dessus.
$1 \leq k \leq n \Rightarrow n + 1 \leq k + n \ \Rightarrow \frac{1}{k+n} \leq \frac{1}{n+1}$ et par somme, $u_n \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \leq 1$. Donc la suite (u_n) est majorée par 1. Donc elle converge.
2. Plus difficile. Beaucoup de variantes possibles. Proposition de la variante suivante (courte mais astucieuse) :
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}) - u_n = \frac{1}{n+1}(nu_n) + \frac{1}{(n+1)^2} - u_n = -\frac{1}{n+1}u_n + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}(-u_n + \frac{1}{n+1})$.
Il reste à comparer u_n et $\frac{1}{n+1}$. Or $u_n = 1 + ... \geq \frac{1}{n+1}$. donc $-u_n + \frac{1}{n+1} \leq 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante et comme elle est minorée par 0, elle converge.
On aurait aussi pu écrire $u_{n+1} - u_n$ sous forme de somme (sans revenir à u_n), et s'en sortir par encadrement.

Corrigé exercice 29 3.(c) et 4

$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n-1}(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}} - 1) = \sqrt{n-1}(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} - 1) = \sqrt{n-1}(\sqrt{1 + \frac{2}{n-1}} - 1) \sim \sqrt{n-1} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{n-1}$ car $\frac{2}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où après simplification $u_n \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ puisque $n-1 \sim n$ et comme $\sqrt{}$ est une puissance constante (puissance 1/2), $\sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$.

Limite de $u_n = n\ln(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}})$: on voit déjà une FI au milieu $\frac{\infty}{\infty}$, mais $\frac{n+1}{n-1} = \frac{1+1/n}{1-1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
il y a donc une 2e FI puisque $\ln(X) \underset{X\to1}{\longrightarrow} 0$ et $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
On va passer par les équivalents usuels ...
Remarquer que la racine n'est pas un pb avec le ln, car on connait une formule qui permet de l'enlever.
Donc on va chercher à utiliser l'équivalent usuel du ln mais pas celui de la racine (surtout qu'on aurait eu du mal à faire apparaître un -1 à côté de la racine).

$u_n = \frac{1}{2}n\ln(\frac{n+1}{n-1})$

Il reste à mettre l'intérieur du ln sous la forme $1 + truc$, comme on l'a fait dans la question 3.
On trouve $u_n = \frac{1}{2}n\ln(1 + \frac{2}{n-1}) \sim \frac{1}{2}n\frac{2}{n-1}$ car $\frac{2}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Finalement, $u_n \sim n\frac{1}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ puisque $n-1 \sim n$.
Donc la suite u converge vers 1.

Attention : peut-être avez-vous été tenté de faire comme suit : $u_n = \frac{1}{2}n\ln(\frac{1+1/n}{1-1/n}) = \frac{1}{2}n(\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1-\frac{1}{n}))$ pour pouvoir appliquer deux fois l'équivalent usuel du ln.
On a bien $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ et $\ln(1-\frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{n}$ MAIS on ne peut pas sommer deux équivalents donc ON NE PEUT PAS écrire $\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1-\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n} - (-\frac{1}{n})$.
Vous allez me dire : mais ici pourtant ca marche ! On obtient la même chose ! Effectivement, mais comme une fois sur 2 cela ne marche pas, et qu'on ne peut pas savoir à l'avance si on va être dans le cas où çà marche ou non, on ne peut JAMAIS le faire ....

Corrigé exercice 31

1. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, "u_n existe et $u_n > 0$". (Attention de ne pas confondre la suite (u_n) avec le terme u_n).
cas n=0 : $u_0 = 1 > 0$.
Supposons que pour un certain n, u_n existe et $u_n > 0$. Montrons que pour ce n,u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$. Or vu la relation de récurrence, u_{n+1} existe car $u_n > 0$ donc $u_n \neq 0$. Puis par somme, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > 0 + 0 = 0$.
Ccl : la suite est bien définie et strictement positive.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ donc la suite est croissante (strictement).
2. (a) $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1}^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 = u_k^2 + 2 + \frac{1}{u_k^2} - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}$
   (b) **Méthode 1**
On somme la relation précédente : $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1}(2 + \frac{1}{u_k^2})$.
Or la somme de gauche est une somme télescopique : $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_n^2 - u_0^2$, et par linéarité, on peut réexprimer la somme de droite : $\sum_{k=0}^{n-1}(2 + \frac{1}{u_k^2}) = \sum_{k=0}^{n-1}2 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} = 2n + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$.
D'où $u_n^2 - u_0^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$ et finalement, $u_n^2 = u_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} = 1 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$.
Méthode 2 : par récurrence.
$n = 1$: $u_1 = u_0 + \frac{1}{u_0} = 2$ donc $u_1^2 = 4$ et $2 \times 1 + 1 + \sum_{k=0}^{0}\frac{1}{u_k^2} = 3 + 1 = 4$.
Supposons pour un certain $n \geq 1$, $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$ et montrons que $u_{n+1}^2 = 2(n+1) + 1 + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k^2}$.
Or d'après (a), $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2}$ d'où par H.R.
$u_{n+1}^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} + 2 + \frac{1}{u_n^2} = 2n + 3 + [\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} + \frac{1}{u_n^2}] = 2n + 3 + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k^2}$.
Conclure.

(c) Il suffit de remarquer dans 2.(b) que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \geq 0$, d'où $u_n^2 \geq 2n+1$.

Ou faire la différence ! D'après a), $u_n^2 - (2n+1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \geq 0$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on a $u_n = \sqrt{u_n^2}$, donc on en déduit : $u_n \geq \sqrt{2n+1}$, d'où par comparaison, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

SINON : pour trouver la limite de u, on aurait pu montrer par l'absurde que la suite n'était pas convergente. En effet, supposons qu'elle converge, et notons ℓ sa limite : alors comme la suite est croissante et que $u_0 = 1$, on obtient $\ell \geq 1 > 0$. D'où par passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, on obtient $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$. Relation équivalente à $\frac{1}{\ell} = 0$, impossible. (Attention, de bien réaliser, qu'il fallait justifier $\ell \neq 0$ et que l'information $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ ne suffisait pas puisqu'à la limite, on obtenait seulement $\ell \geq 0$.)
Donc la suite u diverge, et comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.

3. (a) Soit $n \geq 2$. On veut majorer $u_n^2 = 2n+1+\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ par $2n+2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.
(Pourquoi prendre $n \geq 2$? car ainsi, $n-1 \geq 1$ et la dernière somme n'est pas "vide").

Méthode 1. On fait la différence : $2n+2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - u_n = 2n+2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - (2n+1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}) = 1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} = 1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - (\frac{1}{u_0^2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}) = 1-1+\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2}\frac{1}{k} - \frac{1}{u_k^2}) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k^2-2k}{2k\times u_k^2} \geq 0$ puisque d'après 2.c), pour tout $k \geq 1$, $u_k^2 \geq 2k+1 \geq 2k$.

Méthode 2 : on réalise que pour majorer $u_n^2 = 2n+1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$, il faut minorer $\frac{1}{u_k^2}$, pour pouvoir minorer la somme.
Pour tout $k \geq 1$, $u_k^2 \geq 2k+1 > 2k$ donc $\dfrac{1}{u_k^2} \leq \dfrac{1}{2k}$ (le terme en $k=0$ est donc à garder à part).

Donc pour $n \geq 2$ ($\Leftrightarrow n-1 \geq 1$), $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{u_0^2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

D'où $u_n^2 = 2n+1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} \leq 2n+2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

(b) Comme pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$, par somme de ces inégalités, on obtient, (pour $n \geq 3$), $\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n-1}(\ln(k)-\ln(k-1)) = \ln(n-1) - \ln(1) = \ln(n-1)$. D'où par (a),
$u_n^2 \leq 2n+2+\frac{1}{2}(1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}) \leq 2n+2+\frac{1}{2}(1+\ln(n-1))$ soit encore, $u_n^2 \leq 2n+\frac{5}{2}+\frac{\ln(n-1)}{2}$.

(c) Des questions 2.(c) et 3.(b) on obtient l'encadrement $2n+1 \leq u_n^2 \leq 2n+\frac{5}{2}+\frac{\ln(n-1)}{2}$
Chaque côté de l'encadrement est équivalent à $2n$, donc on voit bien d'où vient le résultat. Comme il n'y a pas de théorème d'encadrement version "équivalents", il faut revenir à la définition et montrer que $\frac{u_n^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ via l'encadrement.
Or en divisant par $2n$ l'encadrement précédent, on obtient :
$1+\frac{1}{2n} \leq \frac{u_n^2}{2n} \leq 1+\frac{5}{4n}+\frac{\ln(n-1)}{4n}$ et d'après le théorème d'encadrement, $\frac{u_n^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (appliquer les croissances comparées au terme $\frac{\ln(n-1)}{4n} = \frac{1}{4}[\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(1-1/n)}{n}]$). Donc $u_n^2 \sim 2n$, et en prenant la puissance $1/2$ (opération permise sur les équivalents), $u_n \sim \sqrt{2n}$.

4.
```
def f(n):
    u=1
    for i in range(1,n+1):
        u=u+1/u
    return u
```