Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille : Variables à densité

Corrigé de l'exercice 1 :

Les propriétés à montrer sont (cf cadre correspondant de la page 1 du poly) : f est positive sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points, et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.
Sur le premier exemple cela donne :

— f_1 est nulle donc positive en-dehors de $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f_1(x) = \cos(x) \geq 0$ donc f_1 est positive sur $\mathbb{R}$.

— Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f_1 : x \mapsto \cos(x)$ est continue, et ailleurs, f_1 est constante nulle donc continue. Donc f_1 est continue sauf peut-être en 0 et $\frac{\pi}{2}$ points de raccord. (en fait elle n'est pas continue en 0, et elle est continue en $\frac{\pi}{2}$, mais peu importe !)

— f_1 est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ et nulle en-dehors donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge (**) et vaut : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
Justification de (**) : en effet, vu la nullité de f en-dehors de $[0, \frac{\pi}{2}]$, on sait que les intégrales $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(t)dt$ convergent et valent 0, et sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, l'intégrale existe bien par continuité de f, donc converge.

Conclure : f_1 est bien une densité de probabilité. En notant X une variable de densité f_1, on a presque sûrement $X(\Omega) = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Pour le dernier point (cv de l'intégrale) dans les autres énoncés :

— pour f_2, même esprit avec un découpage en plus (Attention, faux problème en 0, à justifier).
On aura presque sûrement $X(\Omega) = [-1, 1]$

— pour f_3 : remarquer que f_3 est paire, donc il suffit de regarder la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} f_3(t)dt$.
Or f_3 est nulle sur $[0, 1[$ donc l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ converge et vaut 0. Puis sur $[1, +\infty[$: posons $A > 1$. Alors $\int_1^A f(t)dt = \int_1^A \frac{1}{|t|^3}dt = \int_1^A \frac{1}{t^3}dt = [-\frac{1}{2}t^{-2}]_1^A = -\frac{1}{2}\frac{1}{A^2} + \frac{1}{2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_3(t)dt$ converge et vaut $\int_1^{+\infty} f_3(t)dt = \frac{1}{2}$.
Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_3(t)dt$ converge et vaut $\int_0^{+\infty} f_3(t)dt = 0 + \frac{1}{2}$.
Donc par parité de f_3, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_3(t)dt$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f_3(t)dt = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.
On aura $X(\Omega) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

— pour f_4 : on connait une primitive. On pose $A < B$:
alors $\int_A^B f_4(t)dt = \int_A^B \frac{e^t}{(e^t+1)^2}dt = [-\frac{1}{e^t+1}]_A^B = -\frac{1}{e^B+1} + \frac{1}{e^A+1} \underset{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}$.
Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_4(t)dt$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f_4(t)dt = 1$.
On aura presque sûrement $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 2 :

1. f doit être positive sur $\mathbb{R}$, donc il faut que $a \geq 0$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, il faut étudier l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$. On reconnait une primitive : posons $A < B$.
Alors $\int_A^B \frac{a}{t^2+1}dt = a[\arctan(t)]A^B = a(\arctan(B) - \arctan(A)) \underset{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}}{\longrightarrow} a(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = a\pi$. Donc l'intégrale converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = a\pi$.
Conclusion, f est une densité de probabilité ssi $a = \frac{1}{\pi}$. Alors presque sûrement $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

2. Comme presque sûrement $X(\Omega) = \mathbb{R}$, il faut regarder la convergence absolue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.
Or $xf(x) = a\frac{x}{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} a\frac{1}{x}$. Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge, on en déduit par critère d'équivalence (les deux intégrandes en jeu sont bien continus et positifs) que l'intégrale $\int_1^{+\infty} xf(x)dx$ diverge, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ diverge. X n'admet donc pas d'espérance.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = a\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2+1}dt = a \lim\limits_{A\to-\infty} \int_A^x \frac{1}{t^2+1}dt = a \lim\limits_{A\to-\infty} [\arctan(t)]_A^x = a(\arctan(x) - (-\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 3 :

1. f est positive sur $\mathbb{R}$ ssi $a \geq 0$; et pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $[1, +\infty[$, donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1.
   Etude de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$: comme f est nulle sur $]-\infty, 1[$, $\int_{-\infty}^{1} f(x)dx$ converge et vaut 0.
   Etude de $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$, impropre en $+\infty$. On pose $A > 1$.
   Alors $\int_1^A f(x)dx = a\int_1^A x^{-3/2}dx = a[\frac{x^{-1/2}}{-1/2}]_1^A = -2a(\frac{1}{\sqrt{A}} - 1) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 2a$. Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut $2a$.
   Finalement, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0 + 2a = 2a$.
   On en déduit que f est une densité ssi $a = \frac{1}{2}$. Alors presque sûrement $X(\Omega) = [1, +\infty[$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
   Si $x < 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$ et si $x \geq 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dt + a\int_1^x t^{-3/2}dt = 0 + a[\frac{t^{-1/2}}{-1/2}]_1^x = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.
   Finalement, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
3. Comme f est nulle en-dehors de $[1, +\infty[$, il suffit de montrer que $\int_1^{+\infty} xf(x)dx$ diverge.
   Or pour $x \geq 1$, $xf(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$, et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}dx$ diverge ($\frac{1}{2} \leq 1$). Donc par linéarité, on obtient la divergence de $\int_1^{+\infty} xf(x)dx$ donc a fortiori de $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$. Donc X n'admet pas d'espérance.

Corrigé de l'exercice 4 :

1. Sur $]-\infty, 0[$, $f : x \mapsto e^x$ donc f est positive et continue, et sur $[0, +\infty[$ f est constante nulle donc est positive et continue.
   Donc f est positive sur $\mathbb{R}$, et f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0. Enfin, $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 0, et sur $]-\infty, 0[$, f se prolonge par continuite en 0, donc l'intégrale est faussement impropre en 0 (ou poser deux lettres !) : Soit $A < 0$. Alors $\int_A^0 f(t)dt = \int_A^0 e^t dt = [e^t]_A^0 = 1 - e^A \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}$.
   Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ converge et vaut 1, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 0+1=1. Conclure et remarquer presque sûrement $X(\Omega) =]-\infty, 0[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Problème : pour remplacer $f(t)$, il faut savoir où est t (si $t \geq 0$ ou $t < 0$), donc il faut savoir où est x !
   Pour $x < 0$: alors $\forall t \in]-\infty, x]$, $t \in]-\infty, 0[$ d'où $F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^t dt = \lim\limits_{A\to-\infty} [e^t]_A^x = e^x$.
   Puis pour $x \geq 0$, d'après la relation de Chasles, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} e^t dt + \int_0^x 0dt = 1 + 0$ d'après la question 1.
   Finalement, $F(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
   Conseil : vérifier rapidement que votre F trouvé est bien continue sur au(x) point(s) de raccord, et que les limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont les bonnes . En général, cela suffit à détecter vos erreurs !

3. L'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument et est nulle.
   Il reste donc à étudier la cv absolue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx$. Or pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $xf(x) \leq 0$, donc par linéarité, la convergence absolue revient à la convergence. Posons $A < 0$: pour les mêmes raisons qu'au 1., l'intégrale est faussement impropre en 0 (sinon poser une 2e lettre). $\int_A^0 xf(x)dx = \int_A^0 xe^x dx$. IPP : poser $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$ d'où $v(x) = e^x$, avec u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   D'où $\int_A^0 xf(x)dx = [xe^x]_A^0 - \int_A^0 e^x dx = -Ae^A - (1 - e^A) = -1 + e^A - Ae^A \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} -1 \in \mathbb{R}$. Donc X admet une espérance et $E(X) = -1$ (le -1 ne doit pas vous surprendre puisque $X(\Omega) =]-\infty, 0[$! !).

4. (a) On commence par déterminer que presque sûrement $Y(\Omega) =]-\infty, 1[$.
   Puis pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $G(x) = P(Y \leq x) = P(2X + 1 \leq x) = P(X \leq \frac{x-1}{2})$ puisque $2 > 0$
   $= F(\frac{x-1}{2}) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{2}} & \text{si } \frac{x-1}{2} < 0 \\ 1 & \text{si } \frac{x-1}{2} \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{2}} & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
   (b) On sait déjà que G est une fonction de répartition (puisque c'est la fct de répartition de la variable aléatoire Y) : donc ne pas utiliser l'énorme cadre du haut de la page 2 ! ! On veut juste vérifier que Y est bien une variable à densité : c'est donc le 1er cadre du chapitre.
   Il faut montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.
   Or vu l'accolade, et les fonctions usuelles qui apparaissent, on sait déjà que G est continue et C^1 sur $]-\infty, 1[$ et sur $[1, +\infty[$. Donc G est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1.
   Il reste la continuité de G en 1 (on pourrait même dire à gauche en 1) ; or $G(1) = 1$ (il faut utiliser la 2e

ligne) et pour $x > 1$, $G(x) = 1 \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 1 = G(1)$ et pour $x < 1$, $G(x) = e^{\frac{x-1}{2}} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} = e^0 = 1 = G(1)$ par continuité de l'exponentielle. Donc G est continue en 1, et par suite sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que Y est une variable à densité (l'an prochain, pour une transformation affine comme celle-là, vous pourrez utiliser un résultat de cours).
Une densité de Y est : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x-1}{2}} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(c) presque sûrement $Z(\Omega) =]0, +\infty[$ donc si $x \leq 0$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = 0$ et si $x > 0$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$ (puisque $x \geq 0$) $= P(X \leq \sqrt{x}) - P(X \leq -\sqrt{X}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$ (d'après le 3e cadre du poly). Il reste à remplacer à l'aide de la question 2. : comme $\sqrt{x} \geq 0$, $F(\sqrt{x}) = 1$ et comme $-\sqrt{x} \leq 0$, $F(-\sqrt{x}) = e^{-\sqrt{x}}$. Finalement, $F_Z(x) = 1 - e^{-\sqrt{x}}$.
On obtient $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
Il reste à montrer que F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, et C^1 sauf peut-être en 0 (laissé en exo). Une densité de Z est : $f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Corrigé de l'exercice 5 :

$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x \in [1, e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. $\forall x \geq 1$, $\ln(x) \geq 0$, donc f est positive sur $\mathbb{R}$. De plus, f est continue car nulle sur $]-\infty, 1[$ et $]e, +\infty[$ et continue comme fonction usuelle (ln) sur $[1, e]$.
De plus, comme f est nulle en-dehors du segment $[1, e]$, et continue sur le segment $[1, e]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_1^e \ln x dx = [x\ln x - x]_1^e = e\ln(e) - e - (0-1) = 1$.
f est bien la densité d'une variable aléatoire, que l'on notera X. On remarque que $X(\Omega) = [1, e]$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.
Donc si $x < 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$.
Si $x \in [1, e]$, $F(x) = \int_{-\infty}^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = 0 + [t\ln t - t]_1^x = x\ln x - x + 1$, et enfin, si $x > e$, $F(x) = 1$.
Finalement, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x\ln x - x + 1 & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ 1 & \text{si } x > e \end{cases}$
3. Comme X est presque sûrement bornée, X admet une espérance et $E(X) = \int_1^e x\ln x dx = [\frac{x^2}{2}\ln x]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx$ par IPP
($u' = x$, et $v = \ln x$ d'où $u = \frac{x^2}{2}$ et $v' = \frac{1}{x}$, u, v de classe C^1 sur $[1, e]$)
d'où $E(X) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}[x^2]_1^e = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$.
4. On pose $Y = \ln X$ (bien définie vu $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$).
Le but est de montrer que Y est une variable à densité, et de trouver une densité de Y.
   (a) Remarquer que presque sûrement $Y(\Omega) = \ln([1, e]) = [0, 1]$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(Y \leq x) = P(\ln(X) \leq x) = P(X \leq e^x) = F(e^x)$. (Si on demande explicitement G, il faut encore remplacer F par son expression : on trouve
   $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^x < 1 \\ e^x \ln e^x - e^x + 1 & \text{si } 1 \leq e^x \leq e \\ 1 & \text{si } e^x > e \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^x - e^x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
   (b) Comme X est une variable à densité, F est continue sur $\mathbb{R}$, et C^1 sauf peut-être ici en 1 et e. Donc par composée avec l'exponentielle, G est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf éventuellement en deux points ($\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$). Donc Y est une variable à densité et une densité est :
   $g(x) = \begin{cases} e^x + xe^x - e^x = xe^x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   Si vous n'aviez pas exprimé G, il fallait dériver la relation de composée : $G(x) = F(e^x)$. D'où,
   $g(x) = e^x f(e^x) = \begin{cases} e^x \ln(e^x) & \text{si } e^x \in [1, e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} xe^x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Corrigé de l'exercice 6 :

1. Pour tout $x \in [-\ln(2), \ln(2)]$, $f(x) = e^{-|x|} \geq 0$, et f est nulle donc positive en-dehors. De plus, comme $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $[-\ln(2), \ln(2)]$, et par suite f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en $-\ln(2)$ et $\ln(2)$.
Enfin, il reste à étudier $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$. Pour simplifier la rédaction, on peut réaliser que f est paire sur $\mathbb{R}$,

donc il suffit d'étudier $\int_0^{+\infty} f(t)dt$. Or f est continue sur le segment $[0, \ln(2)]$ et nulle sur $]\ln(2), +\infty[$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe et vaut $\int_0^{\ln(2)} f(t)dt = \int_0^{\ln(2)} e^{-|t|}dt = \int_0^{\ln(2)} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{\ln(2)} = -e^{-\ln(2)} + 1 = -e^{\ln(1/2)} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$. On en déduit bien par parité de f, que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $2 \times \frac{1}{2} = 1$. Ccl et remarquer que $X(\Omega) = [-\ln(2), +\ln(2)]$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Problème pour remplacer $f(t)$, car selon t, on ne prend pas la même expression ! il faut donc distinguer des cas.
   Posons $x < -\ln(2)$: alors pour tout $t \in]-\infty, x]$, $t < -\ln(2)$ donc $f(t) = 0$. Donc dans ce cas , $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.
   Posons alors $x \in [-\ln(2), \ln(2)]$: attention, cela ne veut pas dire que pour tout $t \in]-\infty, x]$, $f(t) = e^{-|t|}$!! il faut couper l'intégrale.
   D'après la relation de Chasles, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-\ln(2)} f(t)dt + \int_{-\ln(2)}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-\ln(2)} 0dt + \int_{-\ln(2)}^{x} e^{-|t|}dt = 0 + \int_{-\ln(2)}^{x} e^{-|t|}dt$. Il reste un problème, car il faut enlever la valeur absolue pour pouvoir connaitre une primitive. Il faut donc encore plus découper :
   Posons $x \in [-\ln(2), 0]$. Alors d'après le calcul précédent $F(x) = \int_{-\ln(2)}^{x} e^{-|t|}dt = \int_{-\ln(2)}^{x} e^{t}dt = [e^t]_{-\ln(2)}^{x} = e^x - x^{-\ln(2)} = e^x - \frac{1}{2}$.
   Posons maintenant $x \in [0, \ln(2)]$, alors $F(x) = \int_{-\ln(2)}^{x} e^{-|t|}dt == \int_{-\ln(2)}^{0} e^{-|t|}dt + \int_0^x e^{-|t|}dt = \frac{1}{2} + \int_0^x e^{-t}dt$ (la valeur de la première intégrale s'obtient par parité, vu la question 1 et les calculs faits à ce moment). d'où $F(x) = \frac{1}{2} + [-e^{-t}]_0^x = \frac{3}{2} - e^{-x}$.
   Dernier cas (ouf !) : posons $x > \ln(2)$. Alors $f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-\ln(2)} f(t)dt + \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} f(t)dt + \int_{\ln(2)}^{x} f(t)dt = 0 + 1 + \int_{\ln(2)}^{x} 0dt = 1 + 0 = 1$.
   Conclusions : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(2) \\ e^x - \frac{1}{2} & \text{si } -\ln(2) \leq x \leq 0 \\ \frac{3}{2} - e^{-x} & \text{si } 0 < x \leq \ln(2) \\ 1 & \text{si } x > \ln(2) \end{cases}$

3. presque sûrement $X(\Omega) = [-\ln(2), \ln(2)]$ donc X est presque sûrement bornée, donc X admet une espérance. Ou dire que f est continue sur le segment $[-\ln(2), \ln(2)]$ et nulle en-dehors donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge et vaut $\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} xf(x)dx$. Puis comme f est paire sur $\mathbb{R}$ (ou sur $[-\ln(2), \ln(2)]$), la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = (-x)f(-x) = -xf(x) = -g(x)$ par parité de f.
   D'où $\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} xf(x)dx = 0$ (ou mettre l'intégrale entre $-\infty$ et $+\infty$).
   ccl : X admet une espérance et $E(X) = 0$.

4. (a) $Y = |X|$, donc presque sûrement $Y(\Omega) = [0, \ln(2)]$. Donc pour tout $x < 0$, $G(x) = P(Y \leq x) = 0$ et pour tout $x > \ln(2)$, $G(x) = P(Y \leq x) = 1$. Il reste à calculer $G(x)$ pour $x \in [0, \ln(2)]$. Or pour un tel x, $G(x) = P(Y \leq x) = P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x)$ (puisque $x \geq 0$) $= P(X \leq x) - P(X \leq -x)$ (cf 2e cadre page 1) $= F(x) - F(-x)$. Or $x \in |0, \ln(2)]$, donc $F(x) = \frac{3}{2} - e^{-x}$ et $-x \in [-\ln(2), 0]$ donc $F(-x) = e^{-x} - \frac{1}{2}$ (attention de bien appliquer l'expression de F en $-x$, une fois que vous avez sélectionné la bonne ligne). Finalement, $G(x) = \frac{3}{2} - e^{-x} - (e^{-x} - \frac{1}{2}) = 2 - 2e^{-x}$.
   Ccl : $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2 - 2e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \leq \ln(2) \\ 1 & \text{si } x > \ln(2) \end{cases}$

   (b) G est déjà une fonction de répartition : on veut juste savoir que la variable Y est à densité. Il faut donc montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en quelques points. Or vu les expressions qui apparaissent dans l'accolade, G est de classe C^1 sauf peut-être en 0 et $\ln(2)$. Continuité en 0 (ou faire juste la continuité à gauche !) : $G(0) = 2 - 2e^0 = 0$. Or pour $x < 0$, $G(x) = 0 \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 0 = G(0)$ et pour $x > 0$, x proche de 0, $G(x) = 2 - 2e^{-x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 2 - 2e^0 = 0 = G(0)$ par continuité de l'exponentielle en 0.
   De même pour la continuité à droite en $\ln(2)$: $G(\ln(2)) = 2 - 2e^{-\ln(2)} = 2 - 2e^{\ln(1/2)} = 2 - 2 \times \frac{1}{2} = 1$ et pour $x > \ln(2)$, $G(x) = 1 \underset{x \to \ln(2)^+}{\longrightarrow} 1 = G(\ln(2))$. Donc G est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   Ccl : Y est une variable à densité et une densité de Y est (par exemple) $g(x) = \begin{cases} 2e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \leq \ln(2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Corrigé de l'exercice 7 :

1. f est positive si a l'est, et est continue sur $]-\infty, 0]$, $]0, 1[$, et $[1, +\infty[$.
   Comme f est nulle en-dehors de $]0, 1[$, il suffit d'étudier la cv de $\int_0^1 \frac{a}{x+1}$. L'intégrande se prolonge par continuité

en 0 et 1 donc l'intégrale est faussement impropre et$\int_0^1 \frac{a}{x+1} = a[\ln(x+1)]_0^1 = a\ln(2)$.Donc $a = \frac{1}{\ln(2)} \geq 0$ est le réel cherché.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Donc vu les calculs faits en 1 : pour tout $x \leq 0$, $F_X(x) = 0$, pour tout $x \in]0,1[$, $F_X(x) = 0 + \int_0^x \frac{a}{t+1}dt = a\ln(x+1)$ et pour tout $x \geq 1$, $F_X(x) = 1$.

   Quant à l'espérance : comme $X(\Omega) =]0,1[\subset \mathbb{R}^+$, il suffit de regarder la convergence de l'intégrale $\int_0^1 a\frac{x}{x+1}dx$ (car la convergence absolue revient à la convergence). Cette intégrale est faussement impropre donc X admet une espérance et $E(X) = \int_0^1 a\frac{x}{x+1}dx = a\int_0^1 1 - \frac{1}{x+1}dx = a[x - \ln(1+x)]0^1 = a(1-\ln(2))$.

3. (a) Remarquer que comme presque sûrement $X(\Omega) =]0,1[$, presque sûrement $Y(\Omega) =]1,+\infty[$.
   en particulier, pour tout $x \leq 1$, $F_Y(x) = 0$. Puis, si $x > 1$, $P(Y \leq x) = P(\frac{1}{X} \leq x) = P(\frac{1}{x} \leq X) = 1 - P(X \leq \frac{1}{x}) = 1 - F_X(\frac{1}{x}) = 1 - a\ln(\frac{1}{x}+1)$ (puisque $\frac{1}{x} \in]0,1[$).
   Il reste à vérifier que Y est une variable à densité : F_Y est continue sur $]-\infty,1]$ (car nulle) et sur $]1,+\infty[$ (somme et composée de fonctions usuelles). Continuité à droite en 1 : on a $F_Y(1) = 0$ et pour $x > 1$, $F_Y(x) = 1 - a\ln(\frac{1}{x}+1) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1 - a\ln(2) = 0$.
   Pour des raisons similaires, F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1.
   Donc Y est une variable à densité, de densité : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ -a\frac{-1/x^2}{1/x+1} = a\frac{1}{x(x+1)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.
   Espérance : on remarque que sur $]1,+\infty[$, $xf_Y(x) = a\frac{1}{x+1} \sim a\frac{1}{x}$.
   Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}$ est divergente donc (critère à rédiger avec les bonnes hypothèses de continuité et de positivité pour les deux intégrandes), l'intégrale $\int_1^{+\infty} xf(x)dx$ diverge, et donc Y n'admet pas d'espérance.

   (b) Attention, N est une variable discrète ! et vu que p.s. $Y(\Omega) =]1,+\infty[$, on obtient $N(\Omega) = [\![1,+\infty[\![$ (ce n'est pas parce que Y ne prend pas p.s. la valeur 1 que N ne va pas la prendre ! N prend la valeur 1, car $(N=1) = (1 < Y < 2)$...).
   Comme$N$ est une variable discrète, ce n'est pas sa fonction de répartition que l'on va étudier, mais sa loi càd les $P(N = ...)$.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$: $(N = k) = (k \leq Y < k+1)$ d'où $P(N=k) = F_Y(k+1) - F_Y(k) = 1 - a\ln(\frac{1}{k+1}+1) - (1 - a\ln(\frac{1}{k}+1)) = a(\ln(\frac{k+1}{k}) - \ln(\frac{k+2}{k+1})$.
   Pour l'espérance, il faut étudier la cv absolue de la série $\sum_{k\geq 1} kP(N=k)$ ce qui revient ici à la convergence. On est dans le cas d'une somme télescopique partielle (attention, de bien écrire les termes pour visualiser le télescopage partiel) : on pose $S_n = ... = \ln(\frac{2}{1}) + \ln(\frac{3}{2}) + \ln(\frac{4}{3})... + \ln(\frac{n+1}{n}) - n\ln(\frac{n+2}{n+1}) = \ln(n+1) - n\ln(\frac{n+2}{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, car $n\ln(\frac{n+2}{n+1})) = n\ln(1+\frac{1}{n+1}) \sim n\frac{1}{n+1} \sim 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   Donc N d'admet pas d'espérance.

Corrigé de l'exercice 8 :

Si $x \in [0,1[$, $1-x \in]0,1]$, $\ln(1-x) \in]-\infty,0]$ et $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x) \in [0,+\infty[$. Comme presque sûrement, $X(\Omega) = [0,1[$, on en déduit que presque sûrement $T(\Omega) = [0,+\infty[$ (en effet, presque sûrement X ne prend pas la valeur 1, donc cela ne doit pas vous poser problème !).
Donc si $x < 0$, $F_T(x) = P(T \leq x) = 0$. Puis si $x \geq 0$,
$F_T(x) = P(T \leq x) = P(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X) \leq x) = P(\ln(1-X) \geq -\lambda x) = P(1 - X \geq e^{-\lambda x}) = P(X \leq 1 - e^{-\lambda x})$.
Or d'après le cours, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ donc en remplaçant par $1 - e^{-\lambda x}$ (n'hésitez pas à faire un remplacement "naif", même si des lignes seront inutiles, mais remplacez bien partout, y compris après les "si" !)
$F_T(x) = F_X(1-e^{-\lambda x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 - e^{-\lambda x} < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq 1 - e^{-\lambda x} \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 - e^{-\lambda x} > 1 \end{cases}$ Il reste à résoudre $1 - e^{-\lambda x} < 0$ et $1 - e^{-\lambda x} < 1$ pour simplifier les si : $1 - e^{-\lambda x} < 0 \Leftrightarrow 1 < e^{-\lambda x} \Leftrightarrow 0 < -\lambda x \Leftrightarrow x < 0$
$1 - e^{-\lambda x} < 1 \Leftrightarrow 0 < e^{-\lambda x}$ toujours vrai.
Finalement, en combinant tout, on trouve : $F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. D'où $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Application python : `X=rd.random(); T=-1/5*log(1-X).`

Corrigé de l'exercice 9 :

1. cf cours

2. T s'exprime en fonction de X donc la méthode est de passer par la fonction de répartition. On remarque déjà que comme p.s. $X(\Omega) = [0, +\infty[$, alors presque sûrement $T(\Omega) = [0, +\infty[$. En particulier, pour tout $x < 0$, $F_T(x) = 0$. Puis pour $x \geq 0$, $F_T(x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$ (puisque $x \geq 0$) $= P(X \leq \sqrt{x}) - P(X \leq -\sqrt{X}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$ (d'après le 2e cadre du poly). Il reste à remplacer à l'aide de la question 1. : comme $\sqrt{x} \geq 0$, $F(\sqrt{x}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}$ et comme $-\sqrt{x} \leq 0$, $F(-\sqrt{x}) = 0$. Finalement, $F_Z(x) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}$.
   Conclusion : $F_T(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$. Il reste à montrer que F_T est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, et continue partout (pour la continuité à gauche en 0 : $F_T(0) = 1 - e^0 = 0$ et pour $x < 0$, $F_T(x) = 0 \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 0$).
   Donc T est une variable à densité, et une densité de T est : (ATTENTION PIEGE !!)
   $f_T(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \boxed{x \leq 0} \\ \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{array} \right.$. En effet, la deuxième ligne n'a pas de sens si $x = 0$, donc il fallait donner une valeur arbitraire positive en 0 : j'ai choisi de lui attribuer la valeur 0 afin de la regrouper avec le cas $x < 0$ ...

3. Que remarquez vous sur $U(\Omega)$? U est une variable discrète !! On trouve $U(\Omega) = [\![1, +\infty]\!]$. Comme U est une variable discrète, pour trouver sa loi, en général on ne regarde pas la fonction de répartition mais les probabilités du type $P(U = k)$ où $k \in \mathbb{N}^*$.
   Ici, posons $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $(U = k) = (\lfloor X \rfloor = k - 1) = (k - 1 \leq X < k)$ (ne pas hésiter à faire un dessin !) d'où $P(U = k) = P(k - 1 \leq X < k) = F_X(k) - F_x(k - 1)$ (car X est une variable à densité) $= 1 - e^{-\lambda(k-1)} - (1 - e{-}\lambda k) = (e^{-\lambda})^k - (e^{-\lambda})^{k-1} = (e^{-\lambda})^{k-1}(1 - e^{-\lambda})$ donc $P(U = k)$ est de la forme $(1 - p)^{k-1}p$ avec $p = 1 - e^{-\lambda}$.
   D'où $U \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$. En particulier, U admet une espérance et $E(U) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}$

Corrigé de l'exercice 10 :

1. Dernier point : remarquer f paire sur $\mathbb{R}$ donc il suffit de regarder l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$, impropre en $+\infty$. On pose $A > 0$. Alors $\int_0^A f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^A \frac{1}{(1+t)^2}dt = \frac{1}{2}[-\frac{1}{1+t}]_0^A = \frac{1}{2}(-\frac{1}{1+A} + 1) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$. Conclure (2 étapes !).

2. (a) presque sûrement $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$, donc si $x < 0$, $G(x) = 0$. Puis si $x \geq 0$, $G(x) = P(\ln(1 + |X|) \leq x) = P(1 + |X| \leq e^x) = P(|X| \leq e^x - 1)$. Or si $x \geq 0$, $e^x - 1 \geq 0$ donc on peut poursuivre : $G(x) = P(-(e^x - 1) \leq X \leq e^x - 1) = F(e^x - 1) - F(-(e^x - 1))$.
   Conclure : $G(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(e^x - 1) - F(-(e^x - 1)) & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$

   (b) Comme F est la fonction de répartition d'une variable à densité, F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en quelques points. (Ici, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ d'après le th fondamental mais peu importe). Continuité de G : on sait G continue sur $]-\infty, 0[$ comme fonction constante nulle, et G continue sur $[0, +\infty[$, comme composée de fonctions continues (puisque F l'est). Il reste donc la continuité à gauche en 0 : or $G(0) = F(0) - F(-0) = 0$ et pour $x < 0$, $G(x) = 0 \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 0 = G(0)$.
   Pour des raisons analogues, on obtient que G est de classe C^1 sauf en quelques points (ou sauf peut-être en 0, si vous aviez remarqué que F C^1 sur $\mathbb{R}$).
   Ccl : Y est une variable à densité, et une densité de Y est $g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^x f(e^x - 1) + e^x f(-(e^x - 1)) & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$

   (c) On simplifie l'expression de g : $g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$ par parité de f
   $= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2e^x \frac{1}{2(1+|e^x-1|)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^x \frac{1}{(1+e^x-1)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^x \frac{1}{e^{2x}} & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$
   D'où $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$