Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille Variables discrètes

Corrigé de l'exercice 1

1. Première condition : il faut que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a3^{-k} \geq 0$. Il faut donc $a \geq 0$.
   Deuxième condition : il faut que la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} a3^{-k}$ converge, et que sa somme fasse 1.
   Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a3^{-k} = a\frac{1}{3^k} = a(\frac{1}{3})^k$ (formules sur les puissances), donc la série converge puisque $|\frac{1}{3}| < 1$,
   et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a3^{-k} = a\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{3})^k = a(\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{3})^k - 1) = a(\dfrac{1}{1-1/3} - 1) = a(\frac{3}{2} - 1) = a(\frac{1}{2})$.
   La condition est donc : $a \times \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow a = 2$ (qui vérifie bien $a \geq 0$).

2. $A = (X = 2) \cup (X = 4) \cup ...$ (attention de ne pas vous arrêter !).
   Rédaction : $A = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}(X = 2k)$ réunion d'événements incompatibles 2 à 2, donc par σ-additivité,
   $P(A) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a3^{-2k} = 2\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{9})^k = 2\big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{9})^k - 1\big)$ (Attention à ces dernières parenthèses dans la relation de Chasles ! !) $= 2(\frac{1}{1-1/9} - 1) = 2\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.
   Comme un entier est soit pair soit impair, la probabilité que X prenne une valeur impaire sera de $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
   (en fait il suffisait de comparer $P(A)$ à $\frac{1}{2}$).
   Donc X a beaucoup plus de chance de prendre une valeur impaire qu'une valeur paire !

   Pour le comprendre dessiner le début du tableau de la loi de X avec les cases 1,2,3,4 ... et réaliser que $P(X = 1) = \frac{2}{3}$! ! ! ! ! Forcément le résultat est ce qu'il est ....

3. Il faut étudier la convergence absolue de la série $\sum\limits_{k\geq 1} ak3^{-k}$, ce qui revient à la convergence, puisque tous les termes sont positifs.
   Or pour tout $k \geq 1$, $ak3^{-k} = \frac{2}{3}k(\frac{1}{3})^{k-1}$: on reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée qui cv puisque $|\frac{1}{3}| < 1$ donc X admet une espérance et $E(X) = \frac{2}{3}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k(\frac{1}{3})^{k-1} = \frac{2}{3}\frac{1}{(1-1/3)^2} = \frac{3}{2}$.

   Bien sûr, on pouvait remarquer dès le début que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{2}{3})$ puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = 2(3)^{-k} = 2(\frac{1}{3})^k = 2 \times \frac{1}{3} \times (\frac{1}{3})^{k-1} = \frac{2}{3}(1 - \frac{2}{3}))^{k-1}$. Et utiliser le cours : mais ce n'était pas le but de l'exercice ! (Le but ici est de vous faire faire des calculs).

   Pour la variance : commencer par étudier le moment d'ordre 2 en étudiant la cv de la série $\sum\limits_{k\geq 1} k^2P(X = k)$.
   Or pour tout $k \geq 1$, $k^2P(X = k) = 2\big(k(k-1) + k\big)(\frac{1}{3})^k = 2(\frac{1}{3})^2\big(k(k-1)(\frac{1}{3})^{k-2}\big) + 2\frac{1}{3}\big(k(\frac{1}{3})^{k-1}\big)$. CL de termes généraux de séries convergentes car $|\frac{1}{3}| < 1$.
   Donc X admet un moment d'ordre 2 et $E(X^2) = \frac{2}{9} \times \frac{2}{(1-1/3)^3} + \frac{2}{3}\frac{1}{1-1/3)^2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$.
   Donc X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - (\frac{3}{2})^2 = \frac{3}{4}$. (vérifier la formule du cours !)

4. Formule de transfert : étudier la convergence absolue de la série $\sum\limits_{k\geq 1} k(k-1)P(X = k)$ ce qui revient à la convergence ... réaliser que les calculs ont été faits ci-dessus pour ue partie de $E(X^2)$.
   Variante courte : $Y = X(X-1) = X^2 - X$: or X admet un moment d'ordre 2 (donc également d'ordre 1) donc par linéarité $X^2 - X$ admet une espérance et $E(Y) = E(X^2) - E(X) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Corrigé de l'exercice 7

Soit $k \in \mathbb{N}$, $(X > k) = (X = k+1) \cup (X = k+2) \cup .....$

Rédaction : $(X > k) = \bigcup\limits_{j=k+1}^{+\infty}(X = j)$ réunion d'événements incompatibles donc par σ-additivité

$P(X > k) = \sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} P(X = j) = p\sum\limits_{j=k+1}^{+\infty}(1-p)^{j-1} = p\sum\limits_{n=k}^{+\infty}(1-p)^n = p\big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n - \sum\limits_{n=0}^{k-1}(1-p)^n\big)$

$= p(\dfrac{1}{1-(1-p)} - \dfrac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}) = (1-p)^k$ après simplification.

<u>Variante</u> : se ramener à la fonction de répartition, et aux formules vues en cours. L'idée est bonne, mais malheureusement, le cas $k = 0$ devait être fait à part ...
en effet, soit $k \in \mathbb{N}$. $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$,
et pour $k \in \mathbb{N}^*$, d'après le cours $(X \leq k) = \bigcup\limits_{j=1}^{k}(X = j)$ d'où $P(X \leq k) = \sum\limits_{j=1}^{k} P(X = j) = p\sum\limits_{j=1}^{k}(1-p)^{j-1} = p\sum\limits_{j=0}^{k-1}(1-p)^j = p\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}$ d'où le résultat en revenant à $P(X > k)$.

Enfin, pour $k=0$, : $P(X>0)=1$ puisque $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, et $(1-p)^0=1$ donc le résultat reste vrai.

Enfin, pour $k,l\in\mathbb{N}$, $P_{(X>l)}(X>k+l)=\dfrac{P((X>l)\cap(X>k+l))}{P(X>l)}=\dfrac{P(X>k+l)}{P(X>l)}$ car $(X>k+l)\subset(X>l)$ donc $(X>l)\cap(X>k+l))=(X>k+l)$.
D'où $P_{(X>l)}(X>k+l)=\dfrac{(1-p)^{k+l}}{(1-p)^l}$ en utilisant le résultat précédent, vrai pour tout $k\in\mathbb{N}$, donc vrai en particulier en $k+l\in\mathbb{N}$ et en $l\in\mathbb{N}$.
Après simplification, on trouve $P_{(X>l)}(X>k+l)=(1-p)^k=P(X>k)$.
Compréhension de cette formule sur l'exemple de la durée de vie d'une ampoule :
$P_{X>l}(X>k+l)$ est la proba que l'ampoule dure plus de 105 heures sachant qu'elle a déjà fonctionné plus de 100 heures.... et le résultat dit que cette proba est la même que la proba que l'ampoule dure plus de 5h ! ! Bref, la loi géométrique ne tient pas compte du vieillissement de l'ampoule.

Corrigé de l'exercice 8 :

a) X_A représente le temps d'attente du premier pile, et les lancers se font indépendemment les uns des autres donc $X_A\hookrightarrow\mathcal{G}(\frac{1}{3})$. On en déduit $E(X_A)=3$ et $V(X_A)=\frac{1-1/3}{(1/3)^2}=6$. De même pour X_B qui a même loi que X_A puisque l'expérience est la même (attention, X_A et X_B ont même loi mais ne sont pas égales !)

b) $(X_A=X_B)=[(X_A=1)\cap(X_B=1)]\cup[(X_A=2)\cap(X_B=2)][(X_A=3)\cap(X_B=3)]\cup...$
$=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}[(X_A=n)\cap(X_B=n)]$ réunion d'événements 2 à 2 incompatibles, donc par σ-additivité,
$P(X_A=X_B)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}P((X_A=n)\cap(X_B=n))$ et par indépendance des jeux $=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}P(X_A=n)P(X_B=n)$
$=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}P(X_A=n)^2$ (car X_B a même loi que X_A) $=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1})^2$ (loi géométrique).
Finalement, $P(X_A=X_B))=\frac{1}{9}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{4}{9})^{n-1}=\frac{1}{9}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(\frac{4}{9})^k$ (avec $k=n-1$) $=\frac{1}{9}\times\frac{1}{1-4/9}=\frac{1}{5}$.

1. $(X_B\geq k)=\bigcup\limits_{j=k}^{+\infty}(X_B=j)$ réunion d'événements 2 à 2 incompatibles d'où
$P(X_B\geq k)=\sum\limits_{j=k}^{+\infty}P(X_B=j)=\frac{1}{3}\sum\limits_{i=k-1}^{+\infty}(\frac{2}{3})^i$ (en posant $i=j-1$) $=\frac{1}{3}\times\frac{(2/3)^{k-1}}{1-2/3}=(\frac{2}{3})^{k-1}$.
Variante plus astucieuse : on introduit les P_i, F_i. Alors pour $k\geq 2$, $(X_B\geq k)=F_1\cap F_2\cap...\cap F_{k-1}$ d'où $P(X_B\geq k)=(\frac{2}{3})^{k-1}$, encore vrai pour $k=1$.
Puis $(X_B\geq X_A)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}[(X_A=k)\cap(X_B\geq k)]$ (ou passer directement par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. $((X_A=k),k\in\mathbb{N}^*)$).
D'où $P(X_B\geq X_A)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}P(X_A=k)P(X_B\geq k)$ (par indépendance) $=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}\times(\frac{2}{3})^{k-1}=\frac{1}{3}\sum\limits_{j=0}^{+\infty}(\frac{4}{9})^j=\frac{1}{3}\frac{1}{1-4/9}=\frac{3}{5}$
Remarquer qu'on aurait aussi pu montrer le résultat via des propriétés de symétrie : en effet, vu le problème, $P(X_A>X_B)=P(X_B>X_A)$. Comme $P(X_A=X_B)+P(X_A>X_B)+P(X_B>X_A)=1$ (s.c.e. derrière), $\frac{1}{5}+2P(X_B>X_A)=1$ càd $P(X_B>X_A)=\frac{2}{5}$.
On en déduit : $P(X_B\geq X_A)=P(X_B>X_A)+P(X_B=X_A)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$.

Corrigé de l'exercice 9 :

Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=P(X=n)$. Alors par hypothèse, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $4u_{n+2}=5u_{n+1}-u_n$. Suite récurrente linéaire d'ordre 2 : on résout l'équation caractéristique $4x^2-5X+1=0$.
On trouve deux racines $(\Delta=9)$ $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ et 1. Il existe alors un unique couple (λ,μ) de réels tels que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\lambda(\frac{1}{4})^n+\mu$.
Contraintes : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lambda(\frac{1}{4})^n+\mu\geq 0$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\lambda(\frac{1}{4})^n+\mu)=1$ (sous-entendu la série converge et ...)
Or la 2^e contrainte implique que $\mu=0$, puisque la série $\sum\limits_{n\geq 1}^{+\infty}1$ diverge et que la série géométrique de raison $\frac{1}{4}$ converge. (ou poser S_n pour voir la limite infinie dans le cas $\mu\neq 0$).
Donc finalement, pour $n\geq 1$, $u_n=\lambda(\frac{1}{4})^n$ et le calcul de la somme de la série donne alors $\lambda=3$.
On obtient : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(X=n)=3(\frac{1}{4})^n=\frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{n-1}$.
D'où $X\hookrightarrow\mathcal{G}(\frac{3}{4})$, et donc $E(X)=\frac{4}{3}$ et $V(X)=\frac{4}{9}$.

Corrigé de l'exercice 13 :

On introduit les événements S_k "on obtient 6 au k^e lancer", pour tout $k\geq 1$.

1. Il faut au moins n lancers pour obtenir le n^e six, donc $X_n(\Omega)=[n,+\infty[=\{n+k,k\in\mathbb{N}\}$.
$(X_n=n)=S_1\cap S_2\cap...\cap S_n$: une seule issue.

$(X_n = (n+1)) = (\overline{S_1} \cap S_2 \cap ... \cap S_n \cap S_{n+1}) \cup ... \cup (S_1 \cap ... \cap S_{n-2} \cap \overline{S}_n \cap S_{n+1})$ réunion de n événements 2 à 2 incompatibles. (en effet, le dernier doit être un succès, sinon X_n prend la valeur n et non $n+1$).
On en déduit, par indépendance mutuelle des lancers :
$P(X_n = n) = P(S_1)P(S_2)...P(S_n) = (\frac{1}{6})^n$ et comme chaque issue de $(X_n = n+1)$ a même probabilité,
$P(X_n = n+1) = n(\frac{1}{6})^n \frac{5}{6}$.

2. Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}$, $(X_n = n+k) = (\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap ... \cap \overline{S_k} \cap S_{k+1} \cap ... \cap S_{k+n}) \cup (...)$ réunion d'événements où il y a k échecs $\overline{S_{...}}$ et n succès $S_{...}$, dont S_{n+k} (le dernier doit être un succès sinon X_n ne prend pas la valeur $n+k$.) Il y a donc autant d'issues que de façon de positionner ces k échecs $\overline{S_{...}}$ parmi les $n+k-1$ places disponibles : $\binom{n+k-1}{k}$.

   Il reste à calculer la probabilité :
   $P(X_n = n+k) = \binom{n+k-1}{k}(\frac{1}{6})^n(\frac{5}{6})^k$ puisque dans chaque bloc il y a n succès et k échecs.

3. ** Comme $\{(X_n = n+k), k \in \mathbb{N}\}$ forme un s.c.e., la série $\sum\limits_{k \geq 0} P(X_n = n+k)$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n+k) = 1$.

   D'où $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k}(\frac{1}{6})^n(\frac{5}{6})^k = 1$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k}(\frac{5}{6})^k = 6^n$. Il reste à faire le lien avec la série de l'énoncé.

   On pose $j = n+k$. Alors $\sum\limits_{j=n}^{+\infty} \binom{j-1}{j-n}(\frac{5}{6})^{j-n} = 6^n$ soit encore $\sum\limits_{j=n}^{+\infty} \binom{j-1}{j-n}(\frac{5}{6})^j = 5^n$.

   On conclut en remarquant la propriété de symétrie du coefficient binomial : $\binom{j-1}{j-n} = \binom{j-1}{(j-1)-(j-n)} = \binom{j-1}{n-1}$.

Corrigé de l'exerice 14 :

1. Pour montrer une égalité, il faut partir d'un côté et arriver à l'autre : au vu du membre de gauche et de droite, il faut arriver à transformer $P(X = k)$ en $P(X > ....)$. Adaptons le raisonnement fonction de répartition $\Rightarrow$ loi : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X > k-1) = (X = k) \cup (X > k)$ d'où par incompatibilité des événements de la réunion, $P(X > k-1) = P(X = k) + P(X > k)$ et finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)}$.
   D'où : $\sum\limits_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{n} kP(X > k-1) - \sum\limits_{k=0}^{n} kP(X > k)$
   Ces sommes donnent l'impression d'être télescopiques donc deux rédactions possibles :
   (i) on écrit sans le symbole somme :
   $[P(X > 0) + 2P(X > 1) + 3P(X > 2) + ... + nP(X > n-1)] - [P(X > 1 + 2P(X > 2) + ... + (n-1)P(X > n-1) + nP(X > n)] = P(X > 0) + P(X > 1) + P(X > 2) + ... + P(X > n-1) - nP(X > n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$.
   (ii) via un changement de variables :
   $= \sum\limits_{j=-1}^{n-1} (j+1)P(X > j) - \sum\limits_{k=0}^{n} kP(X > k)$
   (ici la borne -1 n'est pas un problème car tout est défini en j=-1 ; mais si cela vous gêne, vous pouvez faire la relation de chasles sur la première somme pour partir de $k = 1$ avant le changement de variable)
   $= 0 + \sum\limits_{j=0}^{n-1} (j+1)P(X > j+1) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} kP(X > k) - nP(X > n)$
   $= \sum\limits_{k=0}^{n-1} [(k+1) - k]P(X > k) - nP(X > n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$.

2. (a) X admet une espérance donc la série $\sum\limits_{k \geq 0} kP(X = k)$ converge (absolument), et le reste $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Par ailleurs, $(X > n) = \bigcup\limits_{k=n+1}^{+\infty} (X = k)$ réunion d'événements 2 à 2 incompatibles d'où
   $P(X > n) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k)$, et par linéarité (toutes les séries cv), $nP(X > n) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} nP(X = k)$.
   Or pour tout $k \geq n+1$, $n \leq k$ donc $nP(X = k) \leq kP(X = k)$ et par somme (toutes les séries sont convergentes) $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} nP(X = k) \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$.
   On obtient bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $nP(X > n) \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$, l'autre inégalité étant évidente.
   Puis, comme la série associée à l'espérance de X converge, son reste tend vers 0 :
   d'où $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et d'après le théorème d'encadrement, $nP(X > n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} P(X > k)$. Comme l'espérance existe, $\sum\limits_{k=0}^{n} kP(X = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} E(X)$, d'où par passage à la limite dans la relation du 1. , $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} kP(X = k) + nP(X > n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} E(X) + 0 = E(X)$.
   On en déduit que la série $\sum\limits_{k \geq 0} P(X > k)$ converge et que la somme de la série vaut : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = E(X)$.

3. (a) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k)$, somme partielle associée à l'espérance. Alors (U_n) est une suite croissante (sommes à termes positifs) et d'après 1) elle est majorée : en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$,
puisque la série de terme général $P(X > k)$ converge et est à termes positifs.
Donc la suite (U_n) converge ; donc la série $\sum_{k \geq 0} kP(X = k)$ converge, et comme elle est à termes positifs, elle converge absolument. D'où X admet une espérance.

(b) Comme X admet une espérance, on peut utiliser la question 2. : on a directement $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

Corrigé de l'exercice 16

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$ et $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ donc par linéarité,
$e^x + e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n(1+(-1)^n)}{n!} = \sum_{\substack{n=0 \\ npair}}^{+\infty} \frac{2x^n}{n!} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ pair, $1 + (-1)^n = 2$ et pour tout n impair, $1 + (-1)^n = 0$. Par un raisonnement analogue, on obtient $e^x - e^{-x} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
2. Loi de Y : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. La valeur 0 est particulière ; on commence par les autres.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors $(Y = k) = (X = 2k)$ d'où $P(Y = k) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda}$.
Puis $P(Y = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k) = 1 - e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = 1 - e^{-\lambda}(\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} - 1) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda} + 2e^{-\lambda})$
(variante plus difficile, car il ne faut pas oublier la valeur 0 : $(Y = 0) = (X = 0) \cup (\bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = 2k + 1))$, donc par $\sigma-$additivité, comme la réunion est disjointe,
$P(Y = 0) = P(X = 0) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k+1) = e^{-\lambda}(1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}) = e^{-\lambda}(1 + \frac{1}{2}(e^{\lambda} - e^{-\lambda})) = \frac{1}{2}(2e^{-\lambda} + 1 - e^{-2\lambda}))$
3. Etudions la cv absolue de la série de terme général $kP(Y = k)$, ce qui revient à la convergence car tous les termes sont positifs.
Pour $k > 0$, $kP(Y = k) = \frac{k}{(2k)!}\lambda^{2k}e^{-\lambda} = \frac{1}{2}\frac{1}{(2k-1)!}\lambda^{2k}e^{-\lambda} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2} \times \frac{\lambda^{2k-1}}{2k-1}$. On reconnait le terme général d'une série convergente (cf 1.) donc Y admet une espérance et
$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(Y = k) = 0 + \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k-1}}{2k-1} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2j+1}}{2j+1}$ (en posant $j = k-1$) $= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2}(e^{\lambda} - e^{-\lambda}) = \frac{\lambda}{2}(1 - e^{-2\lambda})$

Corrigé de l'exercice 17 :
Exo déjà fait en classe, donc je vous laisse reprendre la rédaction validée en classe. Seule différence : la valeur donnée à X dans le cas de l'obtention de n faces est 0 et non $n + 1$. Il faut donc adapter la relation de Chasles ....
Quel est l'intérêt de le faire à la fin de ce chapitre ? Vous pourriez éventuellement tomber dans le piège, d'imaginer que X suit une loi géométrique ... alors que $X(\Omega) = [\![0, n]\!] \neq \mathbb{N}^*$. Donc oui X a le comportement d'un temps d'attente .... mais tronqué puisque l'on s'arrête dans tous les cas au bout de n tirages.
Enfin, pour la rédaction de l'espérance, cela permet de faire écho à la définition en 2 temps de ce chapitre : ici $X(\Omega)$ est fini, donc l'espérance existe .... et il n'y a pas de cv absolue de série à étudier !