# Quelques Corrigés d'Exercices de la feuille : Variables aléatoires finies

**Corrigé fin exercice 5**

$\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ forme un s.c.e. D'après la formule des probabilités totales appliquée à ce s.c.e., on en déduit $P(X = 1) = P(B_1)P_{B_1}(X = 1) + P(B_2)P_{B_2}(X = 1) + ... + P(B_n)P_{B_n}(X = 1) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(B_k)P_{B_k}(X = 1)$.

Or le choix de la boite se fait au hasard, donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(B_k) = \frac{1}{n}$, et le tirage du jeton (une fois la boite choisie) se fait également au hasard, donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P_{B_k}(X = 1) = \frac{1}{k}$ (un jeton numéro 1, $k$ jetons en tout).
D'où $P(X = 1) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Si on regarde maintenant $P(X = 2)$ : que va-t-il se passer ? Le jeton 2 n'apparait pas dans la boite $B_1$.
ATTENTION, cela ne modifie pas le s.c.e.
Le s.c.e est le même pour toute l'expérience, il ne change pas selon l'événement que l'on regarde !
Par contre, ce qui change, c'est la proba $P_{B_1}(X = 2)$ : on a $P_{B_1}(X = 2) = 0$. Les autres proba sachant restent inchangées.
D'où (rédaction) : $P(X = 2) = P(B_1)P_{B_1}(X = 2) + P(B_2)P_{B_2}(X = 2) + ... + P(B_n)P_{B_n}(X = 2) = 0 + \frac{1}{n} \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$.

Plus généralement, soit $j \in [\![1, n]\!]$. Regardons $P(X = j)$ (en effet, connaitre la loi de $X$ c'est connaitre toutes les proba d'apparition. Comme $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, on fixe $j$ quelconque dans $[\![1, n]\!]$ pour regarder $P(X = j)$).
Le jeton $j$ n'apparait qu'à partir de la boite $B_j$ ... jusqu'à la boite $B_n$. Donc si $k < j$, $P_{B_k}(X = j) = 0$ (prendre des chiffres pour que ce soit plus clair). Donc d'après la FPT (toujours la même, avec le MEME sce),
$P(X = j) = P(B_1)P_{B_1}(X = j) + P(B_2)P_{B_2}(X = j) + ... + P(B_n)P_{B_n}(X = j) = 0 + P(B_j)P_{B_j}(X = j) + P(B_{j+1})P_{B_{j+1}}(X = j) + ... + P(B_n)P_{B_n}(X = j) = \sum\limits_{k=j}^{n} P(B_k)P_{B_k}(X = j) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=j}^{n} \frac{1}{k}$.

**Corrigé de la fin de l'exercice 6**

Imaginer tirer toutes les boules : alors regarder la 2e boule blanche depuis le début, c'est comme regarder la première boule blanche en partant de la fin.
Plus précisémment, à toute issue réalisant $(Z = k)$ on peut lui faire correspondre une issue réalisant $(X = n - k + 1)$.
D'où $P(Z = k) = P(X = n - k + 1)$ .....
(pourquoi $n-k+1$ ? car $Z = k$ se réalise si la deuxième boule blanche arrive en $k$ : il reste alors $n-k$ tirages de rouges pour finir tous les tirages. En repartant en arrière, il y a donc $n - k$ tirages de rouge avant la première blanche, qui est donc au tirage $n - k + 1$.)

**Corrigé de l'exercice 8**

On introduit les événements : pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $B_i$ (resp $N_i$) "le $i^e$ tirage donne une blanche (resp. noire)".

1. $X(\Omega) = [\![1, s]\!]$, car le joueur peut obtenir une boule blanche dès le premier tirage, mais il peut également épuiser sa mise en effectuant $s$ tirages de noires.
   pour tout $k \in [\![1, s - 1]\!]$, le jeu s'arrête au $k^{ie}$ tirage, si le joueur obtient une boule blanche, donc
   $(X = k) = N_1 \cap ... \cap N_{k-1} \cap B_k$ et d'après la formule des probabilités composées (à écrire !)
   $P(X = k) = (\frac{2}{3})^{k-1}]\frac{1}{3}$.
   Et quelque soit l'issue, le $s^{ie}$ tirage finit le jeu (si il existe) :
   $(X = s) = [N_1 \cap ... \cap N_{s-1} \cap B_s] \cup [N_1 \cap ... \cap N_{s-1} \cap N_s] = N_1 \cap ... \cap N_{s-1}$ et $P(X = s) = (\frac{2}{3})^{s-1}$.
   Vérification par le calcul : $\sum\limits_{k=1}^{s} P(X = k) = \sum\limits_{k=1}^{s-1} P(X = k) + P(X = s) = \frac{1}{3} \sum\limits_{k=1}^{s-1} (\frac{2}{3})^{k-1} + (\frac{2}{3})^{s-1} = \frac{1}{3} \sum\limits_{j=0}^{s-2} (\frac{2}{3})^{j} + (\frac{2}{3})^{s-1} = \frac{1}{3} \frac{1-(2/3)^{s-1}}{1-2/3} + (\frac{2}{3})^{s-1} = 1 - (2/3)^{s-1} + (\frac{2}{3})^{s-1} = 1$.
   *bonus :* $X$ prend un nombre fini de valeurs, donc $X$ admet une espérance et
   $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{s-1} kP(X = k) + sP(X = s) = \frac{1}{3} \sum\limits_{k=1}^{s-1} k(\frac{2}{3})^{k-1} + s(\frac{2}{3})^{s-1}$. D'après la formule de l'exercice 7 (obtenue par dérivation) avec $n = s - 1$ et $x = \frac{2}{3}$, $E(X) = \frac{1}{3} \frac{1-s(\frac{2}{3})^{s-1}+(s-1)(\frac{2}{3})^{s}}{(1/3)^2} + s(\frac{2}{3})^{s-1}$.

2. Au moment où le jeu s'arrête, il y a eu $X$ tirages effectués, donc la somme qui reste dans la mise est $s - X$. La somme perçue est donc : $T = 3(s - X) = 3s - 3X$. Et si l'on inclut la mise qui a été avancée, le gain relatif est donc : $G = T - s = 2s - 3X$. Le gain relatif moyen est donc (par linéarité) $E(G) = 2s - 3E(X)$.

**Corrigé de l'exercice 9**

1. Comme $X_0 = 0$, à l'instant 1, le mobile est soit à l'abscisse 1 avec probabilité $p$, et en 0 sinon. D'où $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
2. Initialisation faite en 1. Supposons maintenant que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
   Or si le mobile, à l'instant $n$ est en $k \in [0, n]$ (càd si $X_n = k$), à l'instant $n + 1$, le mobile est en $k + 1$ avec probabilité $p$, et en 0 sinon. $k + 1$ parcourt $[\![1, n + 1]\!]$ d'où $X_{n+1}(\Omega = \{0\} \cup [\![1, n + 1]\!] = [\![0, n + 1]\!]$.
   Conclure

3. Vu les déplacements du mobile, si $k \neq 0$, le mobile ne peut arriver en $k$ qu'en venant de $k-1$ : autrement dit $(X_n = k) \subset (X_{n-1} = k-1)$ et plus précisément, $(X_n = k) = (X_{n-1} = k-1) \cap (X_n = k)$
d'où $P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k-1) P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k) = P(X_{n-1} = k-1) \times p$, puisque le mobile bouge de l'abscisse $k-1$ à l'abscisse $k$ avec probabilité $p$.
Ou à rédiger avec la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $(X_{n-1} = j)_{j \in [\![0, n-1]\!]}$
4. Soit $n \neq 0$. Alors $E(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} kP(X_n = k) = \sum\limits_{k=1}^{n} kP(X_n = k)$ et d'après 3. $= \sum\limits_{k=1}^{n} pkP(X_{n-1} = k-1) = p\sum\limits_{j=0}^{n-1}(j+1)P(X_{n-1} = j) = p\sum\limits_{j=0}^{j} P(X_{n-1} = j) + p\sum\limits_{j=0}^{n-1} P(X_{n-1} = j) = pE(X_{n-1}) + p \times 1$.
On reconnaît une suite arithmético-géométrique : on résout $\alpha = p\alpha + p \Leftrightarrow \alpha(1-p) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{p}{1-p}$ puisque $p < 1$. Puis on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = E(X_n) - \alpha$. Alors la suite $(u_n)$ est géométrique de raison $p$ et de premier terme $u_1 = E(X_1) - \alpha = p - \alpha$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p^{n-1}u_1$ et $E(X_n) = u_n + \alpha = p^{n-1}(p - \frac{p}{1-p}) + \frac{p}{1-p}$.

**Corrigé de la fin de l'exercice 11**

2. Soit $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de boîtes (parmi les $n$ achetées) qui sont à rapporter (càd qui contiennent au moins un CD défecteux). Alors (dire les 3 points), $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/20)$.
Donc en moyenne, le nombre de boîtes à rapporter est : $E(X_n) = \frac{n}{20}$.
On cherche $n$ tel que $E(X_n) \leq 1$ : $\frac{n}{20} \leq 1 \Leftrightarrow n \leq 20$. Le client doit donc acheter 20 boites ou moins, pour espérer (en moyenne) ne pas avoir plus d'une boite à rapporter ...

**Corrigé de l'exercice 13 :** $Z$

Les variables en jeu prennent toutes un nombre fini de valeurs, donc les espérances existent.

D'après la formule de transfert, appliquée à $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ bien définie sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $[\![0, n]\!]$
$E(Z) = E(f(X)) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k)P(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
Or $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ puisque $((n+1)-(k+1))! = (n-k)!$.

Pour ceux qui ont du mal avec les manipulations ci-dessus : revenir à l'une des formules vues dans le TD $\Sigma$ sur les coefficients binomiaux : pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.
On l'applique en $n+1$ et $k+1$ : $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$ d'où $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.

Bref ! D'où (comme $\frac{1}{n+1}$ est une constante) $E(Z) = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k}$. Il reste à calculer cette somme, en se ramenant à la formule du binôme en $n+1$.
Deux étapes clés : chgt de variable, puis relation de Chasles.
$E(Z) = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}p^{j-1}(1-p)^{n+1-j}$ en posant $j = k+1$,
$= \frac{p^{-1}}{n+1}[\sum\limits_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}p^j(1-p)^{n+1-j} - \binom{n+1}{0}p^0(1-p)^{n+1}] = \frac{p^{-1}}{n+1}[(p+1-p)^{n+1} - (1-p)^{n+1}]$ d'après la formule du binôme de Newton (au rang $n+1$). Finalement, $E(Z) = \frac{p^{-1}}{n+1}(1-(1-p)^{n+1})$.

**Corrigé de l'exercice 14**

Pour les deux derniers : pour reconnaitre une loi binomiale il manque des choses ...
Pour $S_2$ il manque le $(\frac{1}{2})^n$ : mais par linéarité $S_2 = 2^n\sum\limits_{k=0}^{n}(k^2+k)(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{n-k}$ donc d'après la formule de transfert, $S_2 = E(X^2 + X)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. D'où finalement par linéarité, $S_2 = E(X^2) + E(X) = (V(X) + (E(X))^2) + E(X) = \frac{n}{4} + (\frac{n}{2})^2 + \frac{n}{2}$.

Pour le dernier : $3^k = 3^k 1^{n-k}$ donc la loi cachée est $\mathcal{B}(n, \frac{3}{4})$. D'où $S_3 = 4^n\sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{n}{k}(\frac{3}{4})^k(\frac{1}{4})^{n-k} = 4^n E(2X+1))$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{3}{4})$ d'où par linéarité, $S_3 = 4^n(2E(X)+1)) = 4^n(2\frac{3n}{4}+1)$.

**Corrigé de l'exercice 15**

1. $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, mais si $X = 0$ alors $Y$ prend une valeur entre 1 et $n$ d'où $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
Rédaction "à la main" : $Y$ ne peut prendre la valeur 1 que si $X$ vaut 1 ou si $X$ vaut 0 (et que le nombre choisi au hasard est alors 1).
D'où $(Y = 1) = (X = 1) \cup ((X = 0) \cap (Y = 1))$ réunion de 2 événements incompatibles
$P(Y = 1) = P(X = 1) + P(X = 0)P_{(X=0)}(Y = 1) = P(X = 1) + P(X = 0) \times \frac{1}{n}$ (car le choix du nombre est équiprobable entre 1 et $n$).

Il reste alors à utiliser que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ d'où $P(Y=1) = np(1-p)^{n-1} + (1-p)^n \times \frac{1}{n}$.
Plus généralement, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $(Y=k) = (X=k) \cap ((X=0) \cap (Y=k))$ réunion de 2 événements incompatibles d'où $P(Y=k) = P(X=k) + P(X=0)P_{(X=0)}(Y=k) = P(X=k) + P(X=0) \times \frac{1}{n} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + (1-p)^n \times \frac{1}{n}$.

Rédaction plus élégante (et qui justifie mieux la première étape) :
D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. $((X=0),(X=1),...(X=n))$,
$P(Y=1) = \sum_{j=0}^{n} P(X=j)P_{(X=j)}(Y=1)$
$= P(X=0)P_{(X=0)}(Y=1) + P(X=1)P_{(X=1)}(Y=1) + P(X=2)P_{(X=2)}(Y=1) + ... + P(X=n)P_{(X=n)}(Y=1)$.
Or pour $j \geq 2$, $P_{(X=j)}(Y=1) = 0$, puis $P_{(X=1)}(Y=1) = 1$, et $P_{(X=0)}(Y=1) = \frac{1}{n}$ (choix aléatoire) d'où $P(Y=1) = P(X=0) \times \frac{1}{n} + P(X=1)$. Et on finit comme précédemment.
De même pour $k \in [\![1,n]\!]$, $P(Y=k) = \sum_{j=0}^{n} P(X=j)P_{(X=j)}(Y=k)$
$= P(X=0)P_{(X=0)}(Y=k) + P(X=k)P_{(X=k)}(Y=k) = \frac{1}{n}P(X=0) + P(X=k)$.

2. $Y$ prend une valeur positive (donc supérieure à 0) lorsque $X=0$, et $Y$ prend la valeur de $X$ sinon : donc $Y \geq X$. Par croissance de l'espérance, $E(Y) \geq E(X)$.

   Ou via le calcul (mais bien plus long !) : par définition de l'espérance, (comme $Y$ prend un nombre fini de valeurs, l'espérance existe bien), $E(Y) = \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k)$ et $E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k)$.
   Or d'après 1., pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P(Y=k) = P(X=k) + \frac{1}{n}P(X=0)$ d'où
   $E(Y) = \sum_{k=1}^{n} k\big(P(X=k) + \frac{1}{n}P(X=0)\big) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kP(X=0) = E(X) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kP(X=0) \geq E(X)$
   puisque $P(X=0) \geq 0$ donc la somme restante est à termes positifs.

**Corrigé de l'exercice 17**

1. $(-1)^k = \begin{cases} -1 & \text{si } k \text{ impair} \\ 1 & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$ d'où $\frac{1}{2}(1+(-1)^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ 1 & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$
2. Il y a $n$ transmissions de réponses (celle de $I_1$, $I_2$, ... $I_n$). Chaque transmission a une probabilité $1-p$ d'être contraire, et ce indépendamment des autres. Donc $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-p)$.
3. Le message final est le bon, si il y a un nombre pair de messages contraires.
   Autrement dit "la réponse transmise est la bonne" $= (X=0) \cup (X=2) \cup (X=4) \cup ... \cup (X = 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ ou (forme plus facile, qui va permettre de faire le lien avec la question 1) $= \bigcup_{\substack{k=0 \\ k\, pair}}^{n} (X=k)$ et finalement, comme les événements de cette réunion sont 2 à 2 incompatibles, $p_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k\, pair}}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}(1+(-1)^k)P(X_n=k)$
   $= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} P(X_n=k) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kP(X_n=k)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(1-p)^kp^{n-k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p-1)^kp^{n-k}$
   $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-1+p)^n$ d'après la formule du binôme $= \frac{1}{2}(1+(2p-1)^n)$.
4. $0 < p < 1 \Rightarrow 0 < 2p < 2 \Rightarrow -1 < 2p-1 < 1$ donc $(pp-1)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
   Effectivement, quand le nombre de plaisantins augmentent, le signal est tellement bruité qu'il devient impossible de démeler le vrai du faux (et ce, quelque soit la probabilité $p$ de départ ....)

**Corrigé de l'exercice 18**

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Alors comme $X$ ne prend que des valeurs entières, $(X > k-1) = (X=k) \cup (X>k)$ (en effet, la première valeur entière strictement plus grande que $k-1$ est $k$).
   Réunion de 2 événements incompatibles, d'où $P(X > k-1) = P(X=k) + P(X>k)$ d'où $P(X=k) = P(X > k-1) - P(X>k)$.

2. Par définition, comme $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$, $E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = 0 + \sum_{k=1}^{n} kP(X=k)$.
   Or pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P(X=k) = P(X>k-1) - P(X>k)$ d'où
   $E(X) = \sum_{k=1}^{n} k(P(X>k-1) - P(X>k)) = \sum_{k=1}^{n} kP(X>k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(X>k)$
   $= \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)P(X>j) - \sum_{k=1}^{n} kP(X>k) = \sum_{j=0}^{n-1} jP(X>j) + \sum_{j=0}^{n-1} P(X>j) - \sum_{k=1}^{n} kP(X>k)$
   $= 0 \times P(X>0) + \sum_{j=0}^{n-1} P(X>j) - nP(X>n)$ puisque la 1ere et la 3e somme se télescopent presque entièrement.

Il reste à réaliser que $P(X > n) = 0$ puisque $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ d'où $E(X) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j)$.

**Corrigé de l'exercice 22**

$\Omega$={tirages sans remise des n boules de l'urne} (c'est donc l'ensemble des permutations des $n$ boules de l'urne) d'où $card(\Omega) = n!$
La situation est équiprobable.
Par exemple, si on prend $i = 1$ : $A_1$ est l'ensemble des issues où le premier tirage a donné 1.
Une issue de $A_1$ s'écrit donc (1, , , ,......, ), où les $(n-1)$ dernières coordonnées sont libres, sous la contrainte d'avoir une et une fois chaque boule parmi les $n-1$ restantes (boule 2 jusqu'à boule $n$).
d'où $card(A_1) = (n-1)!$ et finalement, $P(A_1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.
J'espère que le résultat vous semble naturel!! D'ailleurs pour $A_1$, on aurait pu juste voire $A_1$ comme un événement élémenentaire ... et obtenir directement la proba $1/n$. Par contre, la description de $A_k$ à l'aide d'introduction des événements élémentaires n'aurait pas été très facile (car les $k-1$ premiers tirages donnent ce que l'on veut sauf $k$, puis FPC puis ....). D'où le raisonnement par dénombrement, qui reste le même dans le cas général.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Une issue de $A_k$ s'écrit ( , , ,..., $k$,..., ) avec la boule $k$ en $k^{ie}$ coordonnée. Il faut donc choisir comment permuter les $n-1$ boules restantes (toutes sauf la boule k), dans les $n-1$ places restantes (toutes les coordonnées sauf la $k$).
D'où $card(A_k) = (n-1)!$ et $P(A_k) = \frac{1}{n}$.

**Corrigé de l'exercice 23**.

1. Dans le cas d'un tirage simultané de $n$ boules de l'urne,
$\Omega = \{$tirages simultanés de $n$ boules de l'urne$\}$, $card(\Omega) = \binom{n}{N}$ d'après le cours
$Y(\Omega)$ est un peu plus compliqué car on tire $n$ boules en même temps, donc les $n$ numéros sont distincts : $Y(\Omega) = [\![n, N]\!]$. Soit alors $k \in [\![n, N]\!]$. L'événement $(Y \leq k)$ se réalise dès que toutes les boules tirées portent un numéro inférieur ou égal à $k$ (sinon, le plus grand numéro dépasserait $k$!). Il faut donc avoir tiré $n$ boules simultanément de numéro inférieur à $k$, d'où $card(Y \leq K) = \binom{n}{k}$.
Comme la situation est équiprobable, $P(Y \leq k) = \frac{card(Y \leq k)}{card(\Omega)} = \frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}}$.
Enfin, (cf exercice 10 pour la preuve des formules)
$P(Y = n) = P(Y \leq n)$ et pour $k \in [\![n+1, N]\!]$ : alors $P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1)$, puisque $Y(\Omega) = [\![n, N]\!]$, d'où $P(Y = k) = \binom{k}{n} - \binom{k-1}{n}\binom{N}{n}$.

2. Comme on effectue $n$ tirages avec remise dans une urne contenant $N$ boules,
$\Omega = \{$ $n$-listes de boules de l'urne$\}$ et $card(\Omega) = N^n$.
Comme $Y$ est le plus grand numéro obtenu, $Y(\Omega) = [\![1, N]\!]$.
Soit alors $k \in [\![1, N]\!]$. L'événement $(Y \leq k)$ se réalise dès que toutes les boules tirées portent un numéro inférieur ou égal à $k$ (sinon, le plus grand numéro dépasserait $k$!) Il y a donc $k$ choix de numéro pour chaque boule tirée, et $card((Y \leq k)) = k^n$. Comme la situation est équiprobable, $P(Y \leq k) = \frac{card(Y \leq k)}{card(\Omega)} = \frac{k^n}{N^n}$.
(*) On peut remarquer que cette dernière formule est encore vraie pour $k = 0$, puisqu'alors $P(Y \leq k) = 0$.
Enfin, soit $k \in [\![1, N]\!]$ : alors $P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1)$, puisque $Y(\Omega) = [\![1, N]\!]$, d'où $P(Y = k) = \frac{k^n}{N^n} - \frac{(k-1)^n}{N^n}$.
Pourquoi avoir fait la remarque (*)? Sans la remarque (*), il aurait fallu distinguer $P(Y = 1) = P(Y \leq 1)$ (forme différente du cas général) avant de passer à $P(Y \leq k)$ pour $k \geq 2$.
3. Dans le cas des tirages successifs avec remise.
Comme $X$ est le plus petit numéro obtenu, $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$.
Soit alors $k \in [\![1, N]\!]$. L'événement $(X \geq k)$ se réalise dès que toutes les boules tirées portent un numéro supérieur ou égal à $k$ (sinon, le plus petit serait en-dessous de $k$!) Il y a donc $N - k + 1$ choix de numéro pour chaque boule tirée, et $card((X \geq k)) = (N - k + 1)^n$.
Comme la situation est équiprobable, $P(X \geq k) = \frac{card(X \geq k)}{card(\Omega)} = \frac{(N-k+1)^n}{N^n}$.
Enfin, soit $k \in [\![1, N]\!]$ : alors $P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)$, puisque $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$, (formule encore vraie pour $k = N$) d'où $P(X = k) = \frac{(N-k+1)^n}{N^n} - \frac{(N-k)^n}{N^n}$.
Preuve de $(*)$ : adapter la preuve de l'exercice 10 en remarquant que $(X \geq k) = (X = k) \cup (X \geq k+1)$ puisque $X$ ne prend que des valeurs entières. Réunion de 2 événements incompatibles d'où $P(X \geq k) = P(X = k) + P(X \geq k+1)$.

Dans le cas du tirage simultané :
Comme $X$ est le plus petit numéro obtenu, $X(\Omega) = [\![1, N - n + 1]\!]$ : en effet, le "dernier" cas possible, c'est quand on pioche les $n$ numéros les plus grands : ce sont donc les numéros de $N - n + 1$ à $N$. Il y en a bien $n$ puisque $N - (N - n + 1) + 1 = n$
Soit alors $k \in [\![1, N]\!]$. L'événement $(X \geq k)$ se réalise dès que toutes les boules tirées portent un numéro supérieur

ou égal à $k$ (sinon, le plus petit serait en-dessous de $k\,!$). Le tirage est simultané, et il y a $N-k+1$ choix de numéros ($\geq k$) d'où $card(X \leq k) = \binom{N-k+1}{n}$. On conclut comme dans le cas précédent.

**Corrigé de l'exercice 24**

Comme on lance trois dés (ou trois fois un dé, cela revient au même), $\Omega = [\![1,6]\!]^3$, et $card(\Omega) = 6^3$.
Posons $N =$"la somme donne 9" et $D=$"la somme donne 10".
Comme la situation est équiprobable puisque les dés sont non truqués, il suffit de comparer $card(N)$ et $card(D)$.
Or la somme $1+2+6$ provient de 6=3! issues puisque les 3 entiers 1,2,6 sont distincts donc le choix d'un ordre est une permutation : (1,2,6), (1,6,2), .... De même pour la somme 1+3+5, et 2+3+4.
En revanche, pour la somme 1+4+4, il n'y a que trois issues possibles : $(1,4,4),(4,1,4),(4,4,1)$ ; de même pour la somme 2+2+5. Et enfin la somme 3+3+3 permet une seule issue :(3,3,3).
On en déduit $Card(N) = 6+6+6+3+3+1 = 25$.
Un raisonnement analogue pour $D$ donne $card(D) = 6+6+6+3+3+3 = 27$.
On a bien $card(D) > card(N)$ donc $P(D) > P(N)$, comme le duc l'avait observé.

**Corrigé de l'exercice 26**

1. En particulier, avec $k=m=n$ l'identité de Vandermonde donne $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \binom{2n}{n}$.

   Il reste à remarquer que $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$ pour conclure que $\sum\limits_{j=0}^{n} (\binom{n}{j})^2 = \binom{2n}{n}$.

2. Soit $X$ (resp $Y$) le nombre de piles obtenus par le joueur 1 (resp. 2). Alors, au vu de l'expérience ($n$ lancers indépendants, conditions identiques à chaque lancer), on sait que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, et que $Y$ a même loi que $X$.
   Soit maintenant $A$ l'événement "obtenir le même nombre de piles".
   Alors $A = \bigcup\limits_{j=0}^{n} ((X=j) \cap (Y=j))$ réunion de $n+1$ événements 2 à 2 incompatibles,
   d'où $P(A) = \sum\limits_{j=0}^{n} P((X=j)\cap(Y=j))$ et par indépendance des lancers, $P(A) = \sum\limits_{j=0}^{n} P(X=j)P(Y=j)$
   $= \sum\limits_{j=0}^{n} P(X=j)^2 = \sum\limits_{j=0}^{n} (\binom{n}{j}(\frac{1}{2})^j(\frac{1}{2})^{n-j})^2 = (\frac{1}{2})^{2n}\sum\limits_{j=0}^{n} (\binom{n}{j})^2 = (\frac{1}{2})^{2n}\binom{2n}{n}$ d'après la question précédente.

3. Soit $E$ l'ensemble des tirages de $k$ boules de l'urne.
   L'urne contenant en tout $n+m$ boules, il y a autant de tirages de $k$ boules de l'urne que de combinaisons de $k$ éléments parmi $n+m$ : $\binom{n+m}{k}$.
   D'où $card(E) = \binom{n+m}{k}$.
   Par ailleurs, si on s'intéresse au nombre $j$ de boules blanches de ce tirage de $k$ boules, il peut varier "théoriquement" de 0 à $k$ (théoriquement, car sous réserve qu'il y en ait assez, ce qui dépend de $n$ et de $m$).
   Posons $E_j$ l'ensemble des tirages de $k$ boules avec $j$ blanches. Alors $E = \bigcup\limits_{j=0}^{k} E_j$ et d'après la formule du crible, comme les ensembles $E_j$ sont deux à deux disjoints, $card(E) = \sum\limits_{j=0}^{k} card(E_j)$.
   Il reste à dénombrer $E_j$ : un tirage est dans $E_j$ si il contient $j$ blanches ($\binom{m}{j}$ choix) et $k-j$ rouges ($\binom{n}{k-j}$ choix).
   D'où $card(E_j) = \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$. (encore vrai, même si $E_j$ est vide puisqu'alors les coeff binomiaux sont nuls)
   Et finalement, $\binom{n+m}{k} = card(E) = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$.