

## Exercice 1

$$b) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 3y - 3z = 0 \\ -y + 2z = -1 \end{matrix}} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \end{cases}$$

élimination de x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 0 \\ -y + 2z = -1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ \boxed{\begin{matrix} y - z = 0 \\ z = -1 \end{matrix}} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \end{cases}$$

élimination de y

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \quad \mathcal{Y} = \{(1, -1, -1)\} \quad \text{système de Cramer}$$

$$c) \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2z = -1 \\ x - y - z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = -1 \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = -1 \\ \boxed{\begin{matrix} -y - 3z = 5 \\ -y - 3z = 3 \end{matrix}} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \end{cases} \quad \text{d'où } \mathcal{Y} = \emptyset$$

## Exercice 2

$$b) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y - t = 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 5y + 2z = 0 \\ 5y + 2z = 0 \\ 5y + 2z = 0 \end{matrix}} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y - t = 0 \\ \boxed{5y + 2z = 0} \end{cases}$$

système linéaire: 2 éq - 4 inc

→ choix de 2 inconnues auxiliaires par ex: z et t

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = t \\ 5y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{5}z - t \\ y = -\frac{2}{5}z \end{cases}$$

$$\mathcal{Y} = \left\{ \left( -\frac{6}{5}z - t, -\frac{2}{5}z, z, t \right), z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour le (d) :  $S = \{ (30/18 t, -29/9 t, -28/9 t, t) \text{ avec } t \text{ dans } \mathbb{R} \}$  Il ne reste plus qu'à vous acharner :-)

### Exercice 3 $S_3$

$$S_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z = c & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x+2y-z = b \\ -2x-3y+3z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z = c \\ y+z = b-c & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y-z = a+2c & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z = c \\ y+z = b-c \\ 0 = a+b+c & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

relation de compatibilité.

Si  $a+b+c \neq 0$  (ce qui équivaut à : on a  $b-c \neq -(a+2c)$ )

le système est incompatible :  $\mathcal{Y}_{a,b,c} = \emptyset$

Si  $a+b+c = 0$  (ce qui équivaut à : on a  $b-c = -(a+2c)$ )

le système devient  $\begin{cases} x+y-2z = c \\ y+z = b-c \end{cases}$  donc est compatible avec une infinité de solutions.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = c - y + 2z = 2c - b + 3z \\ y = b - c - z \end{cases} \quad \mathcal{Y}_{a,b,c} = \{ (2c - b + 3z, b - c - z, z), z \in \mathbb{R} \}$$

$S_4$  on peut poser  $S_2$  et  $S_3$

$\triangle$  4 éq par 3 inconnus

relation de compatibilité :  $0 = a + b - c - d$

$$S_4 \Leftrightarrow \begin{cases} x & -7z = d & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ 3x+y-5z = b \\ 4x+2y-z = c \\ 2x+y-3z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & -7z = d \\ y+16z = b-3d & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 2y+26z = c-4d & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ y+11z = a-2d & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & -7z = d \\ y+16z = b-3d \\ -5z = c-2b+2d & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ -5z = a-b+d & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & -7z = d \\ y+16z = b-3d \\ -5z = c-2b+2d \\ 0 = a+b-c-d & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases}$$

si  $0 = a+b-c-d$

$$S_4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{27}{5}b + \frac{16}{5}c - \frac{47}{5}d \\ z = \frac{2}{5}b - \frac{1}{5}c - \frac{2}{5}d \end{cases}$$

$$x = \frac{14}{5}b - \frac{7}{5}c + \frac{9}{5}d$$

unique solution

et si  $a+b-c-d \neq 0$   
 $\mathcal{Y} = \emptyset$