Exercice 1:

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est définie par le tableau

Y \ X	0	1
0	p	$\frac{1}{2} - p$
1	$\frac{1}{3} - p$	$\frac{1}{6} + p$

1. A quel intervalle doit appartenir p pour que ces données soient acceptables ?
2. En déduire alors les lois marginales de X et Y ainsi que leur espérance et variance.
3. Loi de $X + Y$ et de XY.

Exercice 2: **pour aller plus loin*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi conjointe définie par :
pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = a\frac{i+j}{2^{i+j}}$, où $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer a pour que l'on définisse bien ainsi une loi de couple.
2. On pose $Z = \dfrac{1}{2^{X+Y}}$. Montrer que Z admet une espérance et préciser sa valeur.
3. (a) Déterminer la loi de $S = X + Y$.
   (b) Retrouver alors d'une autre façon le résultat de la question 2.

Exercice 3:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte, puis on tire une boule de cette boîte. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boîte, et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de Y. (On pourra remarquer que la somme ne se calcule pas).
3. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 4:

Dans un bureau de poste, il y a deux guichets. Chacune des personnes arrivant à la poste choisit le premier guichet avec une probabilité p, ou le deuxième guichet avec une probabilité $q = 1 - p$. Les personnes effectuent leur choix de façon indépendante. En une heure, le nombre X de personnes arrivées à la poste suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(m)$. On désigne par Y le nombre de personnes ayant choisi le premier guichet.

1. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
2. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{(X=n)}(Y = k)$.
3. Donner la loi du couple (X, Y).
4. Déterminer la loi de Y.

Exercice 5:

On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres et la probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à 0.2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés et Y la variable égale au nombre de colis en bon état. On a donc : $X + Y = N$.

1. Calculer $P_{(N=n)}(X = k)$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Et pour $k > n$?
2. Déterminer alors la loi du couple (N, X).
3. Montrer que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.
4. Donner sans démonstration la loi de Y.
5. A votre avis, les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   Calculer alors les probabilités $P((X = k) \cap (Y = j))$ et $P(X = k)P(Y = j)$, pour $(k, j) \in \mathbb{N}^2$ et conclure.

Exercice 6:

Soit $n \geq 2$. On considère une urne contenant : 1 boule numérotée 1 ; 2 boules n°2 ; $\cdots$; n boules n°n.
On effectue 2 tirages successifs et sans remise dans cette urne. On note X_1 (resp. X_2) le numéro de la première (resp. deuxième) boule tirée.

1. Préciser le nombre N de boules de l'urne, puis déterminer la loi de X_1.
2. Justifier que X_1 admet une espérance et la déterminer.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
4. En déduire la loi marginale de X_2.
5. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 7:

Soit une urne contenant 1 boule blanche et 5 boules rouges. On effectue une infinité de tirages d'une boule avec remise dans cette urne et on s'intéresse aux longueurs des séries successives de B ou de R : par exemple si les tirages donnent $BBRRRRRRBBBRR$ la première série (BB) est de longueur 2, la deuxième ($RRRRRR$) de longueur 6, la troisième de longueur 3 etc....
Soit X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première, deuxième et troisième série.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Montrer que X_1 admet une espérance et la calculer.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
4. En déduire la loi marginale de X_2.
   bonus : Vérifier que $\sum\limits_{k \in X_2(\Omega)} P(X_2 = k) = 1$
5. En considérant $P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1))$, montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
6. ** Décrire l'événement $(X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k)$. En déduire la loi de X_3.
   Que remarquez-vous ?

Exercice 8:

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler la loi de $X + Y$.
2. Déterminer la loi de X sachant $[X + Y = n]$.

Exercice 9:

On réalise une succession de pile ou face, pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$.
On pose $q = 1 - p$ et on note X le rang d'apparition du premier pile, et Y le rang d'apparition du second pile.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer la loi du couple (X, Y).
3. En déduire la loi marginale de Y.
   bonus : vérifier que $\sum\limits_{k \in Y(\Omega)} P(Y = k) = 1$.
4. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
5. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.
6. Soit $n \geq 2$. Déterminer la loi de X conditionnelle à $(Y = n)$ (i.e. la loi de X sachant $(Y = n)$).
7. Soit $n \geq 1$. Déterminer la loi de $Y - n$ conditionnelle à $(X = n)$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Exercice 10: *pour aller plus loin*

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir 6. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués, et Y la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus.

1. Loi de X. Espérance et variance.
2. Loi du couple (X, Y).
3. Loi de Y. On pourra admettre la formule suivante (formule de la série géométrique dérivée k^{ie}) :
   pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$, la série $\sum\limits_{n \geq k} \binom{n}{k} x^{n-k}$ converge et $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$
4. Reconnaître la loi de $Y + 1$.
5. En déduire que Y admet une espérance et une variance, et les déterminer.

Exercice 11:

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants différents. Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0, 1[$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus après ces n appels.
Puis, elle réessaie une deuxième fois les correspondants non obtenus. On note Y le nombre de correspondants obtenus lors de cette 2e phase, et on pose $Z = X + Y$.

1. Loi de X, espérance et variance.
2. Loi du couple (X, Y).
3. Démontrer que pour tout triplet d'entiers (n, k, j) tels que $j + k \leq n$, $\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$.
4. Loi de Y. *Après calculs, reconnaître la loi de Y.*
5. Que représente Z ? Déterminer alors la loi de Z.
   On pourra chercher une relation analogue à celle du 3.

Exercice 12:

Un individu joue avec un dé équilibré. Dans un premier temps, il lance le dé jusqu'à obtenir pour la première fois un six : soit N le nombre de lancers nécessaires. Dans un deuxième temps, si le premier six est apparu au n^e lancer, il relance le dé n fois : soit X le nombre de six obtenus au cours de cette deuxième série de lancers. On admettra que pour tout $x \in]-1,1[$, $\forall j \geq 0$, la série $\sum_{i \geq j} \binom{i}{j} x^{i-j}$ est convergente et $\sum_{i=j}^{+\infty} \binom{i}{j} x^{i-j} = \frac{1}{(1-x)^{j+1}}$.

1. Donner la loi de N.
2. Déterminer la loi du couple (N, X).
3. En déduire $P(X = 0)$ puis pour tout $k \geq 1$, $P(X = k)$.

Exercice 13:

Soit X,Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(p)$, où $p \in]0,1[$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$. *bonus : vérifier que* $\sum_{k \in (X+Y)(\Omega)} P(X + Y = k) = 1$.
2. Pour $n \geq 2$, déterminer la loi de X sachant $(X + Y = n)$.

Exercice 14: *pour aller plus loin*

Soit X, Y deux variables indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$.
Déterminer la loi de $Y - X$.

Exercice 15: *pour s'entraîner*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $Z = min(X, Y)$ et $q = 1 - p$.

1. Calculer $P(X \geq n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la loi de Z, et la reconnaître.
3. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 16:

Soit un entier $n \geq 2$, et X_1, X_2 deux variables indépendantes de même loi $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

1. Déterminer la loi de $U = max(X_1, X_2)$ et de $V = min(X_1, X_2)$.
2. Montrer que $n + 1 - U$ a même loi que V.
3. Montrer que U et V admettent une espérance et la calculer.
4. ** Déterminer la loi de $S = X_1 + X_2$

Exercice 17: *pour s'entrainer*

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont p pour les blanches, q pour les noires et r pour les rouges $(p + q + r = 1)$.

On effectue une infinité de tirages successifs et avec remise dans cette urne. Les proportions des boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.

Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On note X_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois. Trouver la loi de X_1 ; préciser son espérance et sa variance.
2. On note X_2 la variable aléatoire représentant le numéro du deuxième tirage d'une boule blanche.
   (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
   (b) En déduire la loi de X_2. Pour vous entrainer, vérifier par le calcul que $\sum_{k \in X_2(\Omega)} P(X_2 = k) = 1$
   (c) Déterminer la loi de la variable $U_2 = X_2 - X_1$. Que remarquez-vous ?
   (d) Vérifier que U_2 et X_1 sont indépendantes.
   (e) Montrer sans calculs que X_2 admet une espérance, et préciser sa valeur.
3. Soit Y_1 la variable égale au numéro du tirage où une boule noire sort pour la première fois.
   (a) Trouver 1a loi du couple (X_1, Y_1).
   (b) Les variables aléatoires X_1 et Y_1 sont elles indépendantes ?
4. * On note W la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche. Quelle est la loi conditionnelle de W sachant $X_1 = k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$?