Feuille d'exercices 11 : Dérivabilité

Exercice 1:

Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

$a(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ $\quad b(x) = \begin{cases} \frac{\exp(2x^2)-1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ $\quad c(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x+1}) & \text{si} \quad x \neq -1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$

Exercice 2:

Soit f une fonction dérivable et paire sur I. Montrer que f' est impaire sur I.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$. Déterminer son ensemble de définition.
Puis, étudier la continuité et la dérivabilité de f.

Exercice 4:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = |\ln(x)|$.

1. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
2. Etudier la dérivabilité de f, puis calculer sa dérivée là où elle est dérivable.

Exercice 6: *pour s'entraîner*

Déterminer sur quel intervalle les fonctions suivantes sont définies puis dérivables et calculer leur dérivée.

$a(x) = (1 + x^2)^x \qquad b(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \qquad c(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2} \qquad d(x) = (x^2 - x^3)^{1/3}$

Exercice 7:

Soit $a \in \mathbb{R}$. On chercher l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation $f' = af$ $(*)$.

1. Soit f une solution de $(*)$.
   (a) On pose $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x)e^{-ax}$. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire f.
2. Déterminer alors l'ensemble des solutions de $(*)$.

Exercice 8:

Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = e^{-\frac{3}{|x|}}(1 + \frac{3}{|x|})$.
4. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f, en précisant les limites de f.

Exercice 9:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = e^{1+\frac{2}{x}}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur un intervalle à préciser et donner le tableau de variations de f^{-1}.
2. Justifier la dérivabilité de f^{-1} sur son ensemble de définition, et calculer $(f^{-1})'(e^3)$ puis $(f^{-1})'(e^5)$
3. Déterminer f^{-1}.
4. Retrouver alors la dérivabilité de f^{-1} sur son ensemble de définition et calculer $(f^{-1})'$.

Exercice 10: *pour s'entraîner*

Soit g la fonction définie sur $]0, 1[$ par $g(x) = \ln|\frac{x-1}{x}| - x$.

1. Montrer que g est une bijection de $]0, 1[$ sur un intervalle à préciser et donner le tableau de variations de g^{-1}.
2. Déterminer $g^{-1}(\ln(2) - 1/3)$ et $g^{-1}(-1/2)$
3. Justifier la dérivabilité de g^{-1} sur $\mathbb{R}$ et calculer $(g^{-1})'(-\frac{1}{2})$.

Exercice 11:

On considère la fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle que l'on déterminera.
2. On note g la bijection réciproque. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall y \in \mathbb{R}$, $g'(y) = \frac{g(y)}{g(y)+1}$.

Exercice 12:

1. Prouver que la fonction sinus définit une bijection de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle que l'on déterminera.
2. Soit g sa fonction réciproque. Dresser le tableau de variation de g et déterminer l'ensemble de dérivabilité de g.

Exercice 13:

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $e^{-a}f(a) = e^{-b}f(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = f(c)$.

Exercice 14:

On considère une fonction g continue et dérivable sur $[0,+\infty[$, telle que $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
Le but est de généraliser le théorème de Rolle, à savoir que sous ces hypothèses, il existe $c \in]0,+\infty[$ tel que $g'(c) = 0$.
On introduit la fonction G définie sur $[0,1]$ par $G(x) = \begin{cases} g(\frac{1}{x}-1) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Justifier que G est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$.
2. A l'aide du théorème de Rolle, montrer que G' s'annule sur $]0,1[$.
3. Calculer alors G' pour en déduire le résultat.

Exercice 15:

A l'aide de l'égalité ou de l'inégalité des accroissements finis :

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $x \leq e^x - 1 \leq xe$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0+\infty[$, $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$. *bonus :* Qu'en est-il si $x \in]-1,0[$?

Exercice 16: *pour aller plus loin*

A l'aide de l'égalité des accroissements finis, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$

Exercice 17:

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\ln x)$.
2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Appliquer l'égalité des accroissements finis sur $[k,k+1]$ à f.
3. En déduire pour $k \geq 2$: $\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k\ln(k)}$.
4. Montrer alors que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ de terme général $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$ diverge.

Exercice 18: *pour s'entraîner et aller un peu plus loin ....*

1. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Appliquer l'égalité des accroissements finis sur $[k-1,k]$ à la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{x}$.
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leq \frac{1}{(k-1)^2}$.
3. Montrer alors que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ converge.

Exercice 19:

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par la relation $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1. A l'aide de l'égalité des accroissements finis, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{k+1} \leq \ln(\frac{k+1}{k}) \leq \frac{1}{k}$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\ln(\frac{n+1}{n}) \leq u_n$.
   (b) Montrer alors que la suite u converge. *La limite de cette suite est appelée constante d'Euler, et notée* γ.
3. Variante : on introduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.
   Montrer que les suites u et v sont adjacentes. Retrouver la conclusion du 2.(b)

Exercice 20:

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^3+1}{3}$ et la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. (a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0, \frac{1}{2}]$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $g(x) \in [0, \frac{1}{2}]$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$.
   (b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ puis que $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$.
   (c) En déduire que la suite u converge vers α.
3. Ecrire un programme python qui renvoie une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Exercice 21: *pour aller plus loin*

Simplifier pour tout $x \in]0, +\infty[$ l'expression $\arctan(\frac{1}{2x^2}) - \arctan(\frac{x}{x+1}) + \arctan(\frac{x-1}{x})$.

Exercice 22:

Montrer par deux méthodes que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

Qu'en est-il pour la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$?

Exercice 23:

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(\frac{e^x-1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ lorsque $x \neq 0$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. On pourra admettre que $e^x - 1 - xe^x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$.
5. Qu'en déduit-on ?

Exercice 24:

On pose $f(x) = \begin{cases} e^{x^2\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer par deux méthodes que f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Variante plus difficile avec $g(x) = \begin{cases} e^{(\sin x)^2\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 25: *pour aller vraiment plus loin*

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = 0 = f(b)$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En introduisant une fonction auxiliaire judicieuse montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ telle que $f'(c) + \alpha f(c) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ telle que $f'(c) + cf(c) = 0$.

Exercice 26: *pour s'entraîner*

Le but est de déterminer une valeur approchée de l'unique solution négative de l'équation $(E) : g(x) = x$ où g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x-3}{2}$. Pour cela, on construit une suite (u_n) qui va converger vers cette unique solution.

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution α sur $\mathbb{R}^-$ puis justifier que $-2 \leqslant \alpha \leqslant -1$.
2. Justifier que $\forall x \in]-\infty, 0]$, $g(x) \in]-\infty, 0]$ et $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
3. On introduit la suite u par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 0$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ puis que $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$.
   (c) En déduire que la suite u converge vers α.
   (d) Ecrire alors un programme python qui renvoie une valeur approchée de α à 10^{-9} près.