

Enoncé supplémentaire sur les variables à densité :

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$, ainsi que l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

1. (a) Vérifier que la fonction f est paire.
- (b) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f .

- (c) Déterminer la fonction de répartition de X .
- (d) Montrer que X admet une espérance et la déterminer.
2. (a) Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.
- (b) Exprimer, pour tout y de I , $\varphi^{-1}(y)$.

On considère dorénavant la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

- (c) Justifier : $\mathbf{P}(Y \leq 0) = 0$.
- (d) Déterminer la fonction de répartition de Y .
- (e) Reconnaître alors la loi de Y et préciser son espérance.
3. (a) Soit U une variable à densité de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la variable $T = -\ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.
- (b) Ecrire un programme python qui donne une simulation de la loi de X .

Enoncé supplémentaire sur les variables à densité :

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$, ainsi que l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

1. (a) Vérifier que la fonction f est paire.
- (b) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f .

- (c) Déterminer la fonction de répartition de X .
- (d) Montrer que X admet une espérance et la déterminer.
2. (a) Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.
- (b) Exprimer, pour tout y de I , $\varphi^{-1}(y)$.

On considère dorénavant la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

- (c) Justifier : $\mathbf{P}(Y \leq 0) = 0$.
- (d) Déterminer la fonction de répartition de Y .
- (e) Reconnaître alors la loi de Y et préciser son espérance.
3. (a) Soit U une variable à densité de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la variable $T = -\ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.
- (b) Ecrire un programme python qui donne une simulation de la loi de X .

Enoncé supplémentaire sur les variables à densité :

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$, ainsi que l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

1. (a) Vérifier que la fonction f est paire.
- (b) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f .

- (c) Déterminer la fonction de répartition de X .
- (d) Montrer que X admet une espérance et la déterminer.
2. (a) Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.
- (b) Exprimer, pour tout y de I , $\varphi^{-1}(y)$.

On considère dorénavant la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

- (c) Justifier : $\mathbf{P}(Y \leq 0) = 0$.
- (d) Déterminer la fonction de répartition de Y .
- (e) Reconnaître alors la loi de Y et préciser son espérance.
3. (a) Soit U une variable à densité de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la variable $T = -\ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.
- (b) Ecrire un programme python qui donne une simulation de la loi de X .

Eléments de correction :

1. (a) f est définie sur $\mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R}, -t \in \mathbb{R}$ et $f(-t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = \frac{e^t}{(e^t(1+e^{-t}))^2} = \frac{e^t}{(e^t)^2(1+e^{-t})^2} = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = f(t)$.
- (b) La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R}$. Étudions la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ en commençant par celle de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$. Soit $x > 0$. $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = \int_0^x -\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = \left[\frac{1}{1+e^{-t}} \right]_0^x = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, donc comme f est paire, on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$.
- (c) Pour tout x réel, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Soit $y < x$ on a : $\int_y^x f(t) dt = \left[\frac{1}{1+e^{-t}} \right]_y^x = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-y}} \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^{-x}}$. D'où $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.
- (d) Etude de la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$. Pour $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$, il suffit d'étudier la convergence, puisque $t \mapsto tf(t)$ est positive sur $\mathbb{R}^+$. Or $\frac{tf(t)}{\frac{1}{t^2}} = \frac{t^3 e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées, donc $tf(t) = o(\frac{1}{t^2})$ en $+\infty$. Comme les fonctions $t \mapsto tf(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$ et que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge ($\alpha = 2 > 1$), l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est elle aussi convergente. L'intégrale $\int_0^1 tf(t) dt$ est l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ d'où $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$ est (absolument) convergente. La fonction f étant paire, la fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est absolument convergente et égale à 0. Ainsi, X admet une espérance avec $E(X) = 0$.
2. (a) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\varphi'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0$. Sur $\mathbb{R}$ la fonction φ est donc continue, strictement croissante, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I =]\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)[=]0, +\infty[$.
- (b) Soit $y \in]0, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}$. $y = \varphi(x) \iff y = \ln(1+e^x) \iff e^y = 1+e^x \iff e^y - 1 = e^x \iff x = \ln(e^y - 1)$, puisque $y > 0 \iff e^y - 1 > 0$ D'où $\varphi : y \in]0, +\infty[, \mapsto \varphi^{-1}(y) = \ln(e^y - 1)$.
- (c) $X(\Omega) = \mathbb{R}$, et vu les valeurs prises par φ , $Y(\Omega) = I =]0, +\infty[$. Donc $P(Y \leq 0) = 0$. (ou rédiger $P(Y \leq 0) = P(\varphi(X) \leq 0)$. Comme φ est à valeurs dans $]0, +\infty[$, l'événement $(\varphi(X) \leq 0)$ est impossible).
- (d)(e) Notons G la fonction de répartition de Y . On sait déjà que pour tout $x \leq 0$, $G(x) = 0$. Puis pour $x > 0$, $G(x) = P(Y \leq x) = P(\varphi(X) \leq x) = P(X \leq \varphi^{-1}(x))$ (car φ est strictement croissante) $= F(\varphi^{-1}(x)) = F(\ln(e^x - 1)) = \frac{1}{1+e^{-\ln(e^x - 1)}} = \frac{1}{1+e^{\ln(\frac{1}{e^x - 1})}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x - 1}} = \frac{1}{\frac{e^x - 1 + 1}{e^x - 1}} = \frac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}$.
Conclure à l'aide d'une accolade d'où $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, et $E(Y) = 1$.
3. (a) cf feuille d'exercices, exercice 8
- (b) Y a même loi que T donc simuler T revient à simuler Y , et $X = \varphi^{-1}(Y)$ d'où

```
u=rd.random()  
Y=-np.log(1-u)  
X=np.log(np.exp(Y)-1)  
print(X)
```