2022/2023

Feuille d'exercices 7 : Ensembles : compléments

Exercice 1: *pour s'entraîner*

Dans chacun des exemples suivants, où on donne un ensemble E et des parties A et B de E, déterminer explicitement $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$.

1. $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$.
2. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty, 2]$ et $B = [1, +\infty[$.
3. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty, 1]$ et $B = [2, +\infty[$.

Exercice 2:

Soit A, B, C trois sous-ensembles de E.
A l'aide des lois de Morgan, justifier que $\overline{A \cap (B \cup C)} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$.

Exercice 3:

On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On considère les ensembles suivants :
$A = \{$les deux cartes tirées sont rouges$\}$, $B = \{$les deux cartes tirées sont un valet et un dix$\}$ et
$C = \{$les deux cartes tirées sont des personnages$\}$

1. Que représente les ensembles : *a)* $\overline{A}$ *b)* $A \bigcap B \bigcap \overline{C}$ *c)* $(A \bigcap B) \bigcap C$
2. Ecrire à l'aide des ensembles A, B, C les ensembles :
   $F = \{$ les deux cartes tirées sont des personnages et ne sont pas toutes les deux rouges$\}$
   $G = \{$on obtient au plus un personnage rouge$\}$

Exercice 4: `preuve de quelques propriétés du cours`

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
2. Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
3. Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.
4. Montrer que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Exercice 5:

Trouver des exemples pour illustrer les deux affirmations suivantes.

1. Sous l'hypothèse $A \cup B = A \cup C$, on ne peut pas conclure $B = C$.
2. Sous l'hypothèse $A \cap B = A \cap C$, on ne peut pas conclure $B = C$.

Exercice 6:

1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = [\![1, n]\!]$. Déterminer $\bigcup_{n=1}^{10} A_n$ et $\bigcap_{n=1}^{10} A_n$ puis $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$.
2. Mêmes questions avec $B_n = [n, n+1]$, $C_n = [\frac{1}{n}, +\infty[$, $D_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ et $E_n = [-\frac{1}{n}, +\infty[$.

Exercice 7:

Soit une famille de parties $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'un ensemble E. Pour tout $n \geq 1$, on pose $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ et $C_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

1. Exprimer B_{n+1} en fonction de B_n et C_{n+1} en fonction de C_n.
2. Comparer alors les ensembles B_{n+1} et B_n au sens de l'inclusion, et faire de même pour C_{n+1} et C_n.

Exercice 8: *pour aller plus loin*

Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$
2. En déduire que si $A \cup B = A \cap C$, $B \cup C = B \cap A$ et $C \cup A = C \cap B$ alors $A = B = C$.

Exercice 9: *pour s'entraîner*

Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}([\![1, 6]\!])$ et vérifier son cardinal.
On pourra ne pas écrire tous les éléments, mais déterminer le nombre d'éléments de chaque "type".