Comparaison de fonctions/suites : révisions

1 Vrai-Faux : à vous de jouer !

Etape 1 : commencer par deviner si l'équivalent proposé est juste ou faux
Etape 2 : en prenant la limite du quotient, ou en construisant l'équivalent, vérifier si votre intuition est juste !
Etape 3 : ajouter des commentaires dans la dernière colonne ... pour rappeler les règles oubliées, ou les confusions et/ou mettre le bon équivalent dans le cas Faux.

Si vous n'avez plus aucun souvenirs, vous pouvez commencer par compléter la section 2.

1	$2t \underset{+\infty}{\sim} t$		
2	$t+2 \underset{+\infty}{\sim} t$		
3	$\frac{e^t-1}{2t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$		
4	$t+\ln t \underset{+\infty}{\sim} t$		
5	$\frac{\ln t}{t+\ln t} \underset{0}{\sim} \frac{\ln t}{t}$		
6	$\frac{\ln t}{t+\ln t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$		
7	$e^{t^2+3t} \underset{+\infty}{\sim} e^{t^2}$		
8	$(t+1)^3 \underset{+\infty}{\sim} t^3$		
9	$\sqrt{e^t-1} \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$		
10	$(1+t)^{1/t} \underset{0}{\sim} 1$		
11	$t\ln t \underset{+\infty}{\sim} t$		
12	$2\sqrt{t}e^t - 10\ln t + \frac{1}{3}t^5 \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{t}e^t$		
13	$n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$		
14	$(\frac{1}{4})^{n+1} \underset{+\infty}{\sim} (\frac{1}{4})^n$		
bonus	$t-\ln(1+t) \underset{0}{\sim} 0$		

2 Rappels de cours

Deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage du point x_0 si

Critère pratique : lorsque g ne s'annule pas au voisinage de x_0, f est g sont équivalentes si

Quelles sont les opérations compatibles avec les équivalents ?
Celles qui ne sont pas compatibles avec les équivalents ?

Rappeler alors les deux **points méthodes** :
$\longrightarrow$ comment trouver un équivalent ? (3 méthodes attendues)

$\longrightarrow$ comment montrer que ... est un équivalent de ... ?

Equivalents usuels :

$e^u - 1 \underset{0}{\sim}$ $\ln(1+u) \underset{0}{\sim}$ $\sqrt{1+u} - 1 \underset{0}{\sim}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1+u)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim}$ $1 - \cos(u) \underset{0}{\sim}$ $\sin(u) \underset{0}{\sim}$

Enfin, si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \underset{x_0}{\sim}$

3 Mini-Feuille d'exercices 16

Exercice 1:

Donner si possible un équivalent des fonctions suivantes au point considéré et préciser les limites en ce point :

$a(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ en 0, $+\infty$ $b(x) = x \sin(\frac{\pi}{x})$ en $+\infty$ $c(x) = \ln(x^2) - x$ en $+\infty$

$d(x) = \frac{(x+1)^x - 1}{x}$ en 0 $e(x) = \frac{1}{x} \ln(\frac{1+x}{1-x})$ en 0 $f(x) = \sin x \ln x$ en 0

**$g(x)$= $x \ln(1+x) - (x+1)\ln(x)$ en $+\infty$ $h(x) = \lfloor x \rfloor \ln(1 + \frac{1}{x^2})$ en $+\infty$ $i(x) = \frac{\ln(\cos^2(x))}{x^2}$ en 0.

Exercice 2:

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Déterminer un équivalent de a_n.
Même question avec $b_n = 2n - \ln(n)$, $c_n = \sqrt{n^2+1} - n$ et $d_n = (n+1)^p - n^p$ (où $p \geq 2$).

Exercice 3: *Vrai-Faux*

1. Si $u_n - v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $u_n \sim v_n$.
2. Si la suite u converge vers un réel non nul, on a $u_{n+1} \sim u_n$.
3. Si la suite u converge vers 0, on a $u_{n+1} \sim u_n$.
4. Si la suite u diverge, on a $u_{n+1} \sim u_n$.
5. Si $u_n \sim v_n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n ont même signe.

Exercice 4:

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+^*$. Préciser x_1.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n - \ln(n) \leq x_n \leq n$.
4. En déduire un équivalent de x_n.

Exercice 5: *pour s'entraîner*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(u_n) = 0$ $(*)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{1}{n}$. Qu'en déduit-on ?
3. A l'aide de la relation $(*)$, trouver un équivalent de u_n.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n} - u_n$. Déterminer un équivalent simple de a_n.

Exercice 6:

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Qu'en déduit-on ?
3. Montrer que $I_n = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$.
4. En déduire que : $\forall n \geq 1$, $0 \leq I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
5. Trouver un équivalent simple de I_n.

Exercice 7: *pour aller plus loin*

A l'aide d'un encadrement, montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} k! \sim n!$.

Exercice 8: *pour aller plus loin*

Soit (a_n) une suite décroissante et positive de réels telle que $a_n + a_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

1. Montrer que la suite a converge vers 0.
2. Donner (en justifiant) un équivalent simple de a_n.

Pour finir cette révision, n'oubliez pas de reprendre les exercices déjà faits sur ce sujet :
— Feuille d'exercices 3 (suites) : exercices 29 et 30 ainsi que les exemples du cours.
— Feuille d'exercices 6 (limites) : exercices 1, 2, 5 et 8 ainsi que les exemples du cours.