Exercice 1:

On considère une expérience aléatoire et Ω l'univers associé. Soit A, B, C trois événements. Ecrire à l'aide des opérations ensemblistes les événements suivants : parmi A, B, C
a) l'un au moins des événements est réalisé b) A et B se réalisent mais pas C
c) un seul des événements est réalisé d) au moins l'un des événements n'est pas réalisé.

Exercice 2:

On lance deux fois un dé honnête :
a) Préciser l'univers associé à cette expérience ainsi que son cardinal.
b) Trouver un libellé pour l'événement $A = \{(1;1), (2;2), ..., (6;6)\}$.
c) A quelle partie de Ω correspond l'événement B="la somme des deux numéros est inférieure ou égale à 4" ?
d) Calculer la probabilité de A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice 3: *INCONTOURNABLE*

On lance n fois (avec $n \geq 2$) une pièce et on introduit les événements P_i (resp. F_i) "le i^e lancer a donné pile (resp. face)" pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Exprimer en fonction de ces événements élémentaires, les événements suivants :
A "n'obtenir que des piles", B "obtenir exactement un pile" , C "obtenir au moins un pile",
D "obtenir au plus un pile", E"obtenir le 1er pile au 3e lancer".
On pourra commencer par prendre $n = 4$.

Exercice 4: *pour s'entraîner*

Déterminer la probabilité d'obtenir 6 avec un dé truqué de telle manière que la probabilité d'avoir une face est proportionnelle au numéro de la face.

Exercice 5:

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées 1,1,2,2,3,3 n fois de suite (avec $n \geq 2$). On note p_n la probabilité que les trois chiffres $(1, 2, 3)$ apparaissent chacun au moins une fois au cours de ces n lancers.
Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose A_i="le numéro i n'apparaît pas durant ces n lancers".

1. Calculer $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, puis montrer que $p_n = 1 - 3(\frac{2}{3})^n + 3(\frac{1}{3})^n$.
2. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

Exercice 6:

On effectue des tirages sans remise dans une urne contenant 5 boules noires et 3 rouges. Pour tout $k \in [\![1, 8]\!]$, on introduit les événements E_k "la première boule noire est obtenue au k^{ie} tirage", et R_k "le k^{ie} tirage donne une rouge".

1. Décrire les événements E_1, ..,E_4 à l'aide des événements R_k.
2. En déduire les probabilités des événements E_1, ... E_4. Que valent $P(E_k)$ pour $k \geq 5$?

Exercice 7:

Une urne contient n boules rouges et n boules vertes. On tire une à une, et sans remise, toutes les boules de l'urne. Quelle est la probabilité qu'à chaque tirage, on ait un changement de couleur ?

Exercice 8:

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Un sac contient initialement j bonbons jaunes et r bonbons roses. On effectue n tirages successsifs d'un bonbon de ce sac selon le protocole suivant : si on tire un bonbon rose, on le remet dans le sac avant le prochain tirage et si on tire un bonbon jaune, on a le droit de le manger.

1. Quelle est la probabilité de manger au moins un bonbon jaune ?
2. Quelle est la probabilité de manger exactement un bonbon jaune ?
3. *bonus :* Sachant qu'on a mangé un seul bonbon jaune, quelle est la probabilité qu'on ait tiré un bonbon jaune en dernier ?

Exercice 9: *pour s'entraîner*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On lance n fois de suite un dé équilibré et on note p_n la probabilité que la somme des nombres obtenus soit paire. Déterminer par récurrence p_n pour tout $n \geq 1$. (On pourra commencer par $n = 1$, puis $n = 2$).

Exercice 10:

Une puce évolue sur trois cases A, B et C de façon aléatoire selon la règle suivante : à l'instant 0, la puce se trouve sur la case A, puis lorsque la puce se trouve sur une certaine case à un instant donné, elle se déplace à l'instant suivant, sur l'une quelconque des autres cases de façon équiprobable. On note A_n (resp. B_n, C_n) les événements : "à l'instant n, la puce est sur la case A (resp. B, C)", et on pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer a_{n+1} en fonction de b_n et c_n.
2. Justifier alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$.
3. En déduire l'expression de a_n en fonction de n. La limite de a_n quand n tend vers l'infini, vous surprend-elle ?

Exercice 11:

On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :

— si l'appareil fonctionne au temps $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité $a \in]0,1[$ d'être en panne au temps n.

— si l'appareil est en panne au temps $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité $b \in]0,1[$ d'être en panne au temps n.

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n.

1. Etablir pour $n \in \mathbb{N}^*$ une relation entre p_n et p_{n-1}.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n en fonction de p_0. Convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 12:

Une urne contient r boules rouges et n boules noires. Une boule est tirée au hasard. On note sa couleur et on la remet dans l'urne avec d boules supplémentaires de la même couleur, où $d \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On effectue cette expérience plusieurs fois et on note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, R_k= "la k^{ie} boule tirée est rouge".

1. Calculer $P(R_1)$ puis montrer que $P(R_2) = P(R_1)$.
2. Si la seconde boule tirée est rouge, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été rouge ?
3. ** Soit $k \geq 2$. Quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été rouge sachant que les $k-1$ boules suivantes sont rouges ?

Exercice 13:

On considère n urnes ($n \geq 1$) numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'urne k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne, puis une boule de cette urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Exercice 14:

On dispose de deux pièces truquées : la pièce 1 donne pile avec une probabilité $p_1 \in]0;1[$ et la pièce 2 donne pile avec une probabilité $p_2 \in]0;1[$. Au premier lancer, on choisit une pièce au hasard et on la lance. Puis on effectue une suite de lancers comme suit : si le n^{ie} lancer a donné pile, avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors le $n+1^e$ lancer s'effectue avec la même pièce qu'au n^{ie} lancer, et si on obtient face, il s'effectue avec l'autre pièce.
On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les événements U_n "le n^{ie} lancer s'effectue avec la pièce 1".

1. (a) Calculer la probabilité de ne jamais lancer la pièce 2 au cours des n premiers tirages ($n \geq 1$).
   On commencera par exprimer l'événement qui nous intéresse en fonction des U_k
   (b) Calculer la probabilité de jeter pour la première fois la pièce 2 au n^{ie} lancer (séparer $n=1$ et $n \geq 2$).
2. (a) Trouver une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n, où l'on a posé $u_n = P(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. *bonus :* Déterminer la probabilité, notée r_n, d'obtenir pile au n^e lancer.

Exercice 15: ** *pour aller plus loin*

On lance au hasard une pièce de monnaie équilibrée et on relève le résultat : pile ou face. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité qu'au cours des n premiers lancers, on n'ait jamais obtenu deux piles successifs et on introduit les événements élémentaires : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, P_k (resp. F_k) "le k^{ie} lancer donner pile (resp. face)"

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. Montrer que $(P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2, F_1)$ est un système complet d'événements.
3. A l'aide de la formule des probabilités totales, trouver une relation entre p_n, p_{n-1} et p_{n-2} pour tout $n \geq 3$.
4. Déterminer alors p_n en fonction de n. Quelle est la limite de p_n quand $n \to +\infty$?

Indépendance

Exercice 16:

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?
1. A : tirer un roi ; B : tirer un rouge. 2. A : tirer une dame ; B : tirer une figure.

Exercice 17:

On lance n fois une pièce équilibrée, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité d'obtenir au plus un pile.

Exercice 18:

On effectue 4 lancers d'une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{3}$.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir autant de piles que de faces.
2. Sachant que le premier lancer donne face, quelle est la probabilité d'avoir un seul pile ?
3. L'événement "obtenir face au premier lancer" est-il indépendant de l'événement "obtenir exactement 2 piles" ?

Exercice 19:

Un joueur est en présence de 2 urnes A et B. Dans l'urne A, il y a 3 boules blanches et 5 boules rouges, et dans l'urne B, il y a 7 boules blanches et 4 boules rouges. Le joueur lance un dé : si le numéro obtenu est inférieur ou égal à 4, il choisit l'urne A, et sinon, il choisit l'urne B. Il tire alors, avec remise dans l'urne choisie, 3 fois une boule.

1. Quelle est la probabilité qu'il n'obtienne que des boules rouges ?
2. Le joueur n'obtient que des boules rouges. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi l'urne A ?

Exercice 20:

Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Déterminer alors la matrice D telle que $M = PDP^{-1}$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $M^n = PD^nP^{-1}$, puis exprimer M^n sous forme de tableau.

Au club de vacances, l'enfant choisit chaque jour une activité parmi "jeu de ballon", "planche à voile" ou "catamaran" selon les règles suivantes. Le premier jour, l'enfant choisit au hasard. Puis si la veille il a choisi

— le jeu de ballon, il reste fidèle à ce sport avec la probabilité $\frac{1}{2}$, ou change pour la planche à voile (resp. catamaran) avec probabilité $\frac{1}{4}$.

— la planche à voile, il reste fidèle à ce sport avec probabilité $\frac{1}{3}$ ou change pour le ballon avec probabilité $\frac{2}{3}$.

— le catamaran, il reste fidèle à ce sport avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ou change pour la planche à voile (resp. le jeu de ballon) avec probabilité $\frac{1}{4}$ (resp. 1/2).

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, b_n (resp. v_n, c_n) la probabilité que l'enfant choisisse le ballon (resp. planche à voile, resp. catamaran) le jour n. On définit enfin X_n, la matrice colonne de coordonnées b_n, v_n et c_n.

1. Déterminer X_1.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel non nul n : $X_{n+1} = MX_n$.
3. A l'aide de la question 2., déterminer alors b_n, v_n et c_n pour $n \in \mathbb{N}^*$, et calculer leur limite quand $n \to +\infty$.

Exercice 21:

Partie I

On considère les matrices A, I et J suivantes : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $A = aJ + bI$.
2. (a) Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.

   (b) Calculer $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1}(-1)^{n-k}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   (c) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = (-\frac{1}{3})^n I + \frac{1}{4}(1 - (-\frac{1}{3})^n)J$

   (d) Expliciter alors la première ligne de la matrice A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 2

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

• Au départ, c'est à dire à l'instant 1, le mobile est sur l'un quelconque des 4 sommets (choix équiprobable).

• Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (resp. B_n, C_n, D_n) l'événement "à l'instant n, le mobile est sur le sommet 1 (resp. 2, 3, 4)".

On note également a_n (resp. b_n, c_n, d_n) leur probabilité respective et on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

1. Donner a_1, b_1, c_1 et d_1.
2. Utiliser la formule des probabilités totales pour justifier soigneusement que pour tout $n \geq 1$, $X_{n+1} = AX_n$, où A est la matrice introduite dans la partie 1.
3. En déduire alors une expression de X_n en fonction de X_1, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire l'expression de a_n lorsque n tend vers $+\infty$. A quoi peut-on s'attendre pour b_n, c_n et d_n ?

Exercice 22: *pour s'entraîner : calculs un peu plus techniques*

Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge, passe au vert à l'instant suivant avec la probabilité p, et, lorsqu'il est vert, passe au rouge à l'instant suivant avec la probabilité q ($0 < p < 1$ et $0 < q < 1$). On note r_n (respectivement v_n) la probabilité que ce feu soit au rouge (respectivement au vert) à l'instant $t = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $r_{n+1} = (1-p)r_n + qv_n$ *et* $v_{n+1} = pr_n + (1-q)v_n$.
2. Déduire du 1. l'existence d'une matrice carrée A d'ordre 2 telle que $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer deux matrices B et C telles que $\begin{cases} B + C = I \\ B + (1-p-q)C = A \end{cases}$.
4. Vérifier que $BC = 0 = CB$ puis que $B^2 = B$ et $C^2 = C$.
5. A l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, A^n en fonction de B et C.
6. En déduire, pour $n \geq 1$, les valeurs de r_n et v_n en fonction de n, r_0 et v_0 puis leurs limites éventuelles.