Exercice 1: Révisions

On pose pour tout $n \geq 1$, $A_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Déterminer $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ et $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$.
Même question avec $B_n = [\frac{1}{n}, +\infty[$ et $C_n = [-\frac{1}{n}, +\infty[$.

Exercice 2:

On effectue une infinité de lancers d'une pièce truquée où $p \in]0,1[$ est la probabilité d'avoir pile. On introduit B "n'avoir aucun pile" ainsi que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A_n" ne pas avoir de pile durant les n premiers lancers".
Déterminer $P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $P(B)$.

Exercice 3:

Une urne contient des boules vertes, en proportion $v \in]0,1[$ et rouges, en proportion $r \in]0,1[$. On effectue des tirages avec remise d'une boule dans l'urne.
Le but est de montrer que presque sûrement, on obtient une boule rouge en un nombre fini de tirages.

1. Méthode 1 : Soit pour tout $n \geq 1$, C_n " on a obtenu la première boule rouge en n tirages ou moins".
   Déterminer $P(C_n)$ pour tout $n \geq 1$. Conclure.
2. Méthode 2 : Soit pour tout $n \geq 1$, D_n " on a obtenu la première boule rouge au n^{ie} tirage".
   Déterminer $P(D_n)$ pour tout $n \geq 1$. Conclure.

Exercice 4:

On effectue une infinité de lancers d'une pièce équilibrée et on pose $n \geq 2$: A_n "au cours des n premiers lancers, face n'est jamais suivi de pile".

1. (a) Déterminer $P(A_n)$ pour $n \geq 2$.
   (b) Est-il probable que face ne soit jamais suivi de pile ?
2. *Variante* : prendre une pièce truquée, dont la probabilité d'obtenir "face" est $p \neq 1/2$.
   (a) Montrer alors que pour $n \geq 2$, $P(A_n) = \frac{p^{n+1}-(1-p)^{n+1}}{2p-1}$.
   (b) Dans ce cas, est-il probable que face ne soit jamais suivi de pile ?

Exercice 5:

Deux joueurs A et B jouent chacun avec deux dés équilibrés. A gagnera en amenant un total de 7 et B en amenant un total de 6. B joue le premier et ensuite (s'il y a une suite), A et B jouent alternativement.
Le jeu s'arrête dès que l'un des deux gagne.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir un total de 6 (resp. 7) en lançant 2 dés.
2. Déterminer la probabilité des évts : B_n (resp. A_n) "B (resp. A) gagne à son n^{ie} lancer" pour $n \geq 1$.
3. Décrire les événements G (resp. F) " B (resp. A) gagne " à l'aide des événements précédents. En déduire la probabilité de succès de B (resp. A).
   Y a-t-il presque sûrement un gagnant ? Le jeu est-il équilibré ?

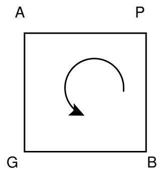
Exercice 6:

Une puce évolue sur trois cases A,B et C. A l'instant $t = 0$, la puce se trouve sur la case A, puis elle se déplace de façon aléatoire sur ces cases selon la règle suivante. Si la puce se trouve en A ou B à l'instant $t = n$, elle ira sur l'une des deux autres cases avec équiprobabilité à l'instant $t = n+1$. Si la puce se trouve en C à l'instant $t = n$, elle y restera à l'instant $t = n+1$. On note A_n, resp B_n, C_n l'événement : "la puce se trouve en A (resp. B, C) à l'instant $t = n$" et on note a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes.

1. Justifier soigneusement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$.
   Donner les relations de récurrence analogues entre b_{n+1} puis c_{n+1} et a_n, b_n, c_n.
2. Remarquer que la suite $(a_n + b_n)$ est géométrique et déduire la valeur de c_n en fonction de n.
   bonus : déterminer les expressions de b_n et a_n en fonction de n.
3. Calculer la probabilité de l'événement E "la puce atteint la case C à un moment non fixé à l'avance".
4. Sachant que la puce est en C à l'instant $t = n+1$, calculer la probabilité qu'elle y ait été pour la première fois à l'instant $t = n$.

Exercice 7:

Un jeu "solitaire" consiste à déplacer un jeton autour des sommets d'un carré $AGBP$ à l'aide d'un dé.



A chaque tour, le joueur lance le dé et déplace le jeton du nombre de sommets donné par le dé et dans le sens trigonométrique ; le joueur joue jusqu'à tomber sur G, il a alors gagné, ou jusqu'à tomber sur P, il a alors perdu. Lors de sa partie, le joueur J part du sommet A.
Soit les événements V "J gagne" ; et B_1 "J va en B à l'issue de son premier lancer".

Lors de sa partie, le joueur J' part du sommet B : on notera V' et B_1' les événements correspondants.

1. Déterminer un système complet d'événements adapté au jeu du joueur J qui contient B_1.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales appliquée à ce s.c.e., démontrer que $P(V) = \frac{2}{5}(1 + P(V'))$.
3. Démontrer de même $P(V') = \frac{1}{5}(1 + 2P(V))$. En déduire $P(V)$ et $P(V')$.
   Quel est le bon choix pour le sommet de départ ?
4. *bonus :* essayer de comprendre pourquoi $P(V) + P(V') = 1$

Exercice 8:

On considère une infinité d'urnes numérotées. La probabilité de choisir l'urne numéro n (avec $n \geq 1$) est égale à $\frac{1}{2^n}$ et l'urne numéro n est composée de 2^n boules dont une seule blanche.
On choisit une urne au hasard puis on tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Exercice 9: *pour aller plus loin*

Un jeu consiste en une succession de tours comme suit : au n^{ie} tour, on lance n pièces de monnaie équilibrée. Le joueur gagne dès que lors d'un tour il n'obtient que des piles, et alors le jeu s'arrête.
On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'événement B_n " au n^{ie} tour, les n lancers de pièce donnent tous pile"
et A_n " à l'issue du n^{ie} tour, le joueur n'a pas encore gagné".

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(A_n)$.
2. Montrer que $\ln(P(A_n))$ est la somme partielle d'une série convergente.
3. En déduire que la probabilité de perdre du joueur est non-nulle.

Exercice 10: *pour aller plus loin*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'événements mutuellement indépendants.

1. Montrer que $P(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n) = 1 - \lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} P(\overline{A_k})$.
2. On suppose de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(A_n < 1)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $P(\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n) = 1$
   (ii) la série $\sum\limits_{n \geq 0} \ln(P(\overline{A_n}))$ diverge
   (iii) la série $\sum\limits_{n \geq 0} P(A_n)$ diverge