

Feuille d'exercices 18 : Espaces vectoriels de dimension finie

*Bases, dimensions***Exercice 1:**

1. Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y - z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer sa dimension.
2. Même question avec $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \text{ et } y = z\}$.

Exercice 2:

1. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$. La famille (u, v) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
 2. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(u, v)$?
 3. Le vecteur $x = (1, 4, 7)$ appartient-il à F ? Si oui, quelles sont ses coordonnées dans la base (u, v) de F ?
- bonus* : Même question avec le vecteur $y = (-1, 6, 9)$.

Exercice 3:

Montrer de trois façons différentes que la famille de $\mathbb{R}^3$ $\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4: *plus abstrait*

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et (e_1, e_2, e_3) une base de E .

On pose alors $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_2 + 2e_3$ et $f_3 = e_1 - e_3$.

Montrer de deux façons différentes que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de E .

Exercice 5:

A partir de la famille $A = ((1, 1, 1); (-1, 2, 0))$, construire une base de $\mathbb{R}^3$.

Même question avec la famille $B = ((1, 0, 1); (-1, 3, 1); (1, 2, 3); (0, 0, 1))$.

Exercice 6: *pour s'entraîner*

1. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $\{(1, -1, 3, -3), (2, -2, 4, -4), (3, -3, 7, -7), (1, -1, 1, -1)\}$. Déterminer la dimension de E .
2. Même question avec E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ engendré par la famille $(x \mapsto x^2 + 2, x \mapsto x^2, x \mapsto x^3 + 1)$.

Exercice 7:

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}.$$

Montrer que F est un espace vectoriel de E et déterminer sa dimension.

On complique ...

Exercice 8:

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on précisera la dimension. *si besoin, on pourra commencer par le cas $n = 3$...*
2. Même question avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
bonus : Qu'en est-il pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices antisymétriques)?

Exercice 9:

1. Montrer que la famille de polynômes $\{(x-1)^k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. *bonus* : déterminer les coordonnées du polynôme $P : x \mapsto x^n$ dans cette nouvelle base.

Exercice 10: **

On pose pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la fonction polynomiale $P_k : x \mapsto x^k(x-1)^{n-k}$.

Montrer que la famille $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$. *On pourra commencer par bien écrire tous les P_k ...*

Exercice 11:

1. On note $H = \{P \in \mathbb{R}_3[x] / P(1) = 0\}$. Montrer que H est un sev de $\mathbb{R}_3[x]$ et déterminer sa dimension.
2. Plus généralement, si $H = \{P \in \mathbb{R}_n[x] / P(1) = 0\}$, montrer que H est un sev de $\mathbb{R}_n[x]$ et déterminer sa dimension.

Exercice 12: ** *pour démontrer le résultat sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 dans un cas particulier*

Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$.

1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites numériques $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. ** Montrer que l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1)$ est un isomorphisme.
3. En déduire la dimension de E .
4. Déterminer les suites géométriques non nulles de E .
5. En déduire une base de E . Réaliser qu'on a bien ainsi redémontré le résultat annoncé.

Exercice 13: l'incontournable

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. (*Rappel* : $f^n = f \circ f \dots \circ f$ n fois)

- Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $f^{n-1}(u) \neq 0$.
- Vérifier alors que la famille $(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u))$ est une base de E .

Exercice 14: début Eml 2015

On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[x] / P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W : x \mapsto x(x-4)$.

- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[x]$.
- Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[x]$, on note $\phi(Q) = WQ$.
- Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[x]$, $\phi(Q) \in E$.
 - Montrer alors que l'application $\phi : Q \mapsto WQ$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ sur E .
 - En déduire (sans calculs) une base de E ainsi que la dimension de E .
- Pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[x]$, on considère le polynôme $\Delta(Q)$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(Q)(x) = Q(x+1) - Q(x)$.
- Montrer que l'application $\Delta : Q \mapsto \Delta(Q)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
 - Déterminer pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[x]$, le degré de $\Delta(Q)$ en fonction du degré de Q .
 - Déterminer le noyau et l'image de Δ .
 - Etablir $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

*Rang***Exercice 15:**

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (-1, 2, 1)$ et $u_3 = (3, -4, -3)$.

Déterminer le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) , puis déterminer une base du sev engendré par ces vecteurs.

Exercice 16:

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y, y + 2z)$$

- Montrer que f est linéaire puis que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.
- Vérifier que $(2, -2, 1) \in \text{Ker } f$. En déduire $\text{Ker } f$.

Exercice 17: pour s'entraîner

Soit la fonction f définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(P)(x) = (x^2 - 1)P'(x)$.

- Justifier que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[x]$ dans $\mathbb{R}_3[x]$.
- Déterminer le noyau de f , son rang, ainsi qu'une base de l'image.

Exercice 18:

Soit l'application g définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$ par $g(P) = (x^2 - 1)P' - (2x + 1)P$

- Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
- Déterminer le rang de g . Qu'en déduit-on ?

On complique ...

Exercice 19: polynômes de Lagrange

Soit l'application $f : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $f(P) = (P(0), P(1), \dots, P(n))$.

- Montrer que f est linéaire et déterminer le noyau de f .
- En déduire que pour tout $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(i) = a_i$.

- ** Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note L_j l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ (*commencer par justifier l'existence des L_j*).

Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, quelles sont les coordonnées de P dans cette base ?

Exercice 20: fondamentale!

Soit n un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2 et soit Φ l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par $\Phi(P) = 2(x-1)P' + 3x^2P''$.

- Vérifier que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
- Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer $\Phi(X^k)$, où $X^k : x \mapsto x^k$.
- Déterminer une base de l'image de Φ .
- Déterminer une base du noyau de Φ . En déduire alors $\text{Ker}(\Phi)$.

Exercice 21:

Reprenre les questions de l'exercice 20 lorsque Φ est définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ par $\Phi(P) = nxP - x^2P'$.

Exercice 22:

Soit Φ l'application qui à tout polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ associe le polynôme $\Phi(P) = P - P'$.
Montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 23:

Indiquer le plus rapidement possible si les applications linéaires suivantes sont des isomorphismes.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ définie par $f(a, b) = a + (a - b)x + (a + b)x^2$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ définie par $f(a, b, c) = a + b + (a + b)x + (a + b + c)x^2$.
3. $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(P) = (P(0), P'(0), P''(0))$.

Exercice 24: pour aller plus loin

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit g pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ par $\forall x \in \mathbb{R}, g(P)(x) = P(x + 1) - P(x)$

1. Vérifier que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer $\text{Ker}(g)$ (*indication : pour $P \in \text{Ker}(g)$, poser $Q = P - P(0)$ et montrer que $Q = 0_{\mathbb{R}[x]}$*).
3. En déduire le rang de g . Comment aurait-on pu faire sinon ?

Exercice 25:

Soit E un espace vectoriel de dimension $2n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\text{rg}(f) = n$.
Montrer que $\text{Im} f = \text{Ker} f$.

bonus : La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 26: A retenir !

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E et n un entier non-nul.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2) \subset \dots \subset \text{Ker}(f^n)$ et que $\text{Im}(f^n) \subset \dots \subset \text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
2. En déduire que la suite des rangs $(\text{rg}(f^n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est stationnaire (càd constante à partir d'un certain rang).

Exercice 27: pour aller plus loin

Soit f et g deux endomorphismes de E .

1. Montrer que $\text{rg}(f \circ g) \leq \text{rg}(f)$.
2. * Montrer alors que $\text{rg}(f \circ g) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$

Exercice 28: pour aller plus loin

Soit E un espace vectoriel de dimension 2, u un vecteur non nul de E , et ϕ une forme linéaire non nulle sur E .
Soit f l'application définie par : pour tout $x \in E$, $f(x) = x + \phi(x)u$.

1. Donner la dimension de $\text{Ker}(\phi)$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E .
3. Donner la dimension de $\text{Ker}(f - \text{id})$.
4. * Montrer que f est un isomorphisme de E ssi $\phi(u) \neq -1$