

Révision 1

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de F et préciser le signe de F sur $\mathcal{D}$.
2. Justifier que F est dérivable sur $\mathcal{D}$ et dresser son tableau de variations.
3. Calculer la limite en 0.
4. Etudier le signe de $F(x) - \ln x$ pour $x \geq 1$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

Révision 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f' . Dresser alors le TV de f .
4. Calculer la limite de f en $+\infty$, puis en $-\infty$. Qu'en est-il en 0 ?

Révision 3

Soit la fonction g définie par $g : x \mapsto \int_0^x \sqrt{x^2 + t^2} dt$.

1. Pourquoi les méthodes des 2 exercices précédents ne s'appliquent-elles plus ici pour trouver le TV de g ?
2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g .
3. **A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = cx|x|$, avec $c = \int_0^1 \sqrt{1+y^2} dy$.
4. En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$ puis dérivable sur $\mathbb{R}$.
5. Dresser le tableau de variations complet de g .

Exercice 1:

Nature des intégrales suivantes et en cas de convergence, calcul de la valeur :

- a) $\int_0^{+\infty} \sin(t) dt$ b) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u} du$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx$ d) $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+2)^2} dt$ e) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$
 f) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/t}}{t^2} dt$ g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ h) ** $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$, $\beta > 1$ i) $e \int_0^{+\infty} (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}) dx$

Exercice 2:

Nature des intégrales suivantes :

- a) $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} dt$ c) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}} dx$ d) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ e) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$
 f) $\int_0^1 \frac{y-1}{\ln y} dy$ g) $\int_0^1 \ln x dx$ h) $\int_1^{+\infty} (\ln(u+1) - \ln u) du$ i) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1-x)} dx$ j) $\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)} dx$

Exercice 3:

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ converge et vaut 1.
2. Nature et calcul de $\int_0^1 t^\alpha \ln t dt$ pour $\alpha > -1$.

Exercice 4: *Changement de variables

1. A l'aide du changement de variable proposé, étudier les intégrales suivantes (convergence puis calcul) :
 a) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ ($y = \frac{1}{t}$) b) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-e^t} dt$ ($u = e^t$)
 c) $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ ($t = \sqrt{x}$) d) $\int_1^{+\infty} \frac{(t-1)^n}{t^{n+2}} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé ($y = \frac{1}{t}$)
2. (a) A l'aide du changement de variable $u = t^2$, calculer $\int_1^x \frac{1}{t} \frac{1}{1+t^2} dt$ pour $x \geq 1$.
 (b) En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.
 On commencera par faire une intégration par parties ...

Exercice 5: pour aller plus loin

Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de l'intégrale $I_n = \int_0^1 (x \ln x)^n dx$, puis à l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que $I_n = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$.

Exercice 6:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

1. Etudier la parité de f .
2. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ et préciser sa valeur.
3. Que peut-on en déduire sur $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$?

Exercice 7:

Calculer pour tout $x \geq 0$, $\int_{-x}^x \sin t \, dt$. Que peut-on en déduire sur $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t \, dt$?

Exercice 8:

1. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$
2. En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.
3. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ converge. *On pourra s'inspirer des questions 1. et 2.*
4. * Montrer alors que pour tout réel t , $|\sin t| \geq \sin^2 t$ puis que $|\sin t| \geq \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$.
5. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ ne converge pas absolument.

Exercice 9:

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n converge.
2. Calculer I_0 et I_1 .
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .
4. En déduire la valeur de I_n en fonction de n .
5. En déduire la convergence de l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-2x} dx$ et préciser sa valeur.

Exercice 10:

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n converge.
2. Calculer I_0 .
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = 2(n+1)(I_n - I_{n+1})$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \pi$.

Exercice 11: Bilan : inspiré d'Edhec E 2004

Le but est de montrer que la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$ existe et de la calculer.

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$ et $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n , puis calculer u_0 et u_1 .
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. (a) * Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$
(b) Donner la limite de la suite (u_n)
4. (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n pour tout $n \geq 2$.
(b) Montrer que : $\forall n \geq 2$, $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}$ puis conclure.

Exercice 12:

On pose pour x réel strictement positif $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Etudier le sens de variation de f .
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 13: La fonction Gamma

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Justifier que l'intégrale $\Gamma(x)$ est convergente pour tout $x > 0$.
2. Calculer $\Gamma(1)$.
3. Justifier que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Exercice 14: pour s'entraîner

On pose pour x réel : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x+t^2} dt$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x)$ existe bien.
2. * f est-elle définie en 0 ?
3. A l'aide du changement de variable $y = \frac{1}{t}$, calculer $f(1)$.

Exercice 15: *pour aller plus loin*

On définit la fonction f par $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et dresser son tableau de variations.
3. f se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?
4. Montrer que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
5. ** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $f(x)$ est équivalent à $\frac{e^{-x}}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 16: *pour aller plus loin*

Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3-1}} dt$.

1. ** Montrer que F est bien définie sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et déterminer F' .
3. Etudier la limite de F en $+\infty$.

Exercice 17:

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 t^n \ln(t) dt$. Montrer que l'intégrale I_n converge et calculer sa valeur.
2. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?
Dans la suite de l'exercice, on admettra que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{1-t} dt$ converge absolument.

- (a) Montrer que pour tout $t \in]0, 1[$, et $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$.

(b) Montrer alors que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+k)^2} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1-t} \ln(t) dt$.

(c) En déduire qu'il existe une fonction f , prolongeable par continuité sur $[0, 1]$ telle que :

$$|I + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+k)^2}| \leq \int_0^1 |f(t)| t^n dt.$$

(d) Montrer qu'il existe un réel M tel que $\int_0^1 |f(t)| t^n dt \leq \frac{M}{n+1}$.

(e) En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge et exprimer sa somme en fonction de I .

Exercice 18:

Montrer que pour toutes les fonctions f suivantes, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1.

Déterminer alors $F : x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t) dt$ pour tout réel x , dans chacun des cas.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & f_2(x) &= \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & f_3(x) &= \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ f_4(x) &= \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & f_5(x) &= \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & f_6(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ f_7(x) &= \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R} & f_8(x) &= \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in [1, e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$