Feuille d'exercices 13 : Intégration sur un segment

Exercice 1:
Dans chacun des cas suivants, calculer l'intégrale après avoir justifié son existence :
$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \quad , J = \int_{1/2}^1 \frac{e^{1/t}}{t^2} dt \quad , K = \int_0^2 \frac{e^y}{e^y+3} dy \quad , L = \int_e^{e^2} \frac{1}{t\sqrt{\ln t}} dt \quad , M = \int_1^4 \sqrt{t}(t-2\sqrt{t}) dt$
$N = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \quad , P = \int_{-1}^1 |x^2-x| dx \quad , Q = \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad , R = \int_0^1 \max(x, \frac{1}{3}) dx.$

Exercice 2:
Déterminer les intervalles où il y a existence de primitives pour les fonctions suivantes, et le cas échéant les calculer : $f(x) = x\sin(x)$ $\quad g(x) = x\sqrt{3-x}$ $\quad h(x) = \frac{3}{x(x-1)}$.

Exercice 3:
Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué entre parenthèses.
$I = \int_0^{10} \dfrac{x}{(x^2+2)(x^2+1)} dx \ (y = x^2), \quad J = \int_0^{10} \frac{1}{e^t+e^{-t}} dt \ (y = e^t), \quad K = \int_{1/2}^2 \cos(\frac{x}{1+x^2}) \frac{\ln x}{x} dx \ (t = \frac{1}{x})$

Exercice 4:
Calculer les intégrales suivantes.
$I = \int_1^2 te^t dt \quad , J = \int_0^{-2} t^2 e^{5t} dt \quad , K = \int_1^9 y^3 \ln y \, dy \quad , L = \int_1^e x(\ln x)^2 dx \quad , M = \int_0^1 y^3 e^{y^2} dy$
$N = \int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x) dx$ (2 méthodes) $\quad , P = \int_0^{\pi/4} e^t \cos(4t) dt.$

Exercice 5:
Montrer que $\int_0^{\pi/2} \cos^3(t) dt \geq 0$. Comment pourrait-on montrer que $\int_0^{\pi/2} \cos^3(t) dt > 0$?

Exercice 6:
1. Calculer pour tout $n \geq 2$, $\int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx$.
2. Montrer que $\forall k \geq 2$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x} dx \leq \frac{1}{k \ln k}$.
3. On pose $S_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k}$: montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 7: *fondamental !*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \sqrt{2}\frac{1}{n+1}$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 8:
1. Pour $x \neq -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}$.
2. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx = \ln 2 - u_n$ où l'on a posé pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
3. Montrer alors que $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\ln 2 - u_n| \leq \frac{1}{n+1}$. Conclusion ?

Exercice 9:
$\forall n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$ et $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$.
1. Donner la monotonie de $(I_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer : $\forall n \geq 0, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. Montrer : $J_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}$.
4. En déduire la limite de J_n puis celle de nJ_n.

Exercice 10:
On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.
1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$. En déduire la limite de I_n quand $n \to +\infty$.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$.
4. Montrer : $\forall n \geq 0, \quad I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. En déduire la limite de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 11:
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2} dx$.
1. a) Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$. En déduire u_0.
   b) Calculer u_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$. En déduire u_2 et u_3.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$. Conclusion ?

Exercice 12: *Un grand classique : les intégrales de Wallis*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Montrer que la suite (W_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$. En déduire une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.
4. Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n\ n!)^2}\ \frac{\pi}{2}$.
5. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et préciser sa valeur.
6. En déduire l'expression de W_{2n+1} pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13: *Un peu plus abstrait*

1. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 f(t)t^n dt$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Soit f une fonction C^1 sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \int_0^1 f(t)\sin(nt)dt$. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 14:

On considère la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F, et préciser son signe.
2. Etudier la parité de F.
3. Justifier que F est C^1 sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations. Retrouver alors le signe de F.

Exercice 15: `Escp E 89`

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_x^{2x} \exp(-t^2)dt$.

1. a) Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que g est une fonction impaire.
   c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. a) Justifier que g est de classe C^1 et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.
   b) Dresser le tableau de variations de g. On précisera $g(0)$.
   c) Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[$, $x\exp(-4x^2) \leq g(x) \leq x\exp(-x^2)$. En déduire la limite de g en $+\infty$, puis en $-\infty$.

Exercice 16:

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^2e^t dt$.

Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 en précisant la valeur. (*on pourra proposer 3 méthodes !*)

Exercice 17:

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.
2. Montrer alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Exercice 18: *on complique les calculs ...*

Soit h la fonction définie par $h(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t}dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de h.
2. Trouver le signe de h selon x.
3. Montrer que h est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que $h'(x) = \frac{2e^{-x^4} - e^{-x^2}}{x}$.
4. En déduire les variations de h.
5. Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[$, $e^{-x^4}\ln x \leq h(x) \leq e^{-x^2}\ln x$ (on séparera les cas $x < 1$ et $x > 1$).
6. En déduire les limites de h en 0 et $+\infty$.

Exercice 19:

Soit la fonction $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F.
2. Montrer que la fonction F est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Etudier la limite de F en $+\infty$.
4. ** A l'aide du chgt de variable $y = x+t$, mq F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x)+F(x) = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}$.

Exercice 20:

Montrer que les suites suivantes sont convergentes, et trouver leur limite.

a) $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n^{3/2}}$ b) $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ c) $w_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\right)^{1/n}$ d)** $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 21: *Prendre des initiatives !*

1. Dresser le tableau de variations complet de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$.
2. Montrer qu'il existe une unique fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{u(x)} e^{t^2}dt = x$.
3. Etudier les variations de u ainsi que sa dérivabilité.

Exercice 22: **

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(t) = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.