Feuille d'exercices 10 : Introduction aux espaces vectoriels

Notion de sous-espace vectoriel

Exercice 1:

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ...

de $\mathbb{R}^2$? $F_1 = \{(x,1), x\in\mathbb{R}\}$ $F_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x+2y=0\}$ $F_3 = \{(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a^2+b=0\}$

de $\mathbb{R}^3$? $F_4 = \{(x,-x,2x), x\in\mathbb{R}\}$ $F_5 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+2y+z=0\}$

de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$? $F_6 = \{\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\}$ $F_7 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ x+2y=0 \text{ et } x+y+3z=0\}$

de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? $F_8 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\}$ $F_9 = \{\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & -a-b \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\}$ $F_{10} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ a=2b+c\}$

Exercice 2:

Pour tout $m\in\mathbb{R}$, on note $E_m = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ 2x-y+3z=m\}$.
Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels E_m est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3:

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AM=0\}$. Montrer que E est un espace vectoriel.

Exercice 4: *pour s'entraîner*

1. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que l'ensemble F des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'ensemble G des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
3. L'ensemble H des matrices inversibles est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 5:

1. Montrer que les deux ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[x]$:
   $F_1=\{P\in\mathbb{R}[x]/P(0)=P'(0)=0\}$ et $F_2=\{P\in\mathbb{R}[x]/P(0)=P(1)=P(2)=0\}$.
2. $E=\{P\in\mathbb{R}[x] \,/\, deg(P)=3\}$ est-il un sev de $\mathbb{R}[x]$? Sinon, quel est le plus petit sev de $\mathbb{R}[x]$ contenant E ?

On complique ...

Exercice 6:

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Les ensembles suivants sont-ils des sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

$A=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n\}$, $B=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, u_0=u_3=0\}$;

$C=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique$\}$, $D=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$;

$E=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0\}$, $F=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente$\}$.

Exercice 7:

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les ensembles suivants sont-ils des sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

$A=\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, f$ paire$\}$, $B=\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, f(2)=f(5)=0\}$

$C=\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, f$ continue$\}$, $D=\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, f$ croissante$\}$

Combinaisons linéaires, familles libres et génératrices

Exercice 8:

On pose les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $e_1=(1,-1,2)$ et $e_2=(1,1,-1)$.

1. Montrer que les vecteurs $u=(3,1,0)$ et $w=(1,-5,8)$ sont des combinaisons linéaires de e_1 et e_2.
2. Qu'en est-il du vecteur $x=(4,1,0)$? *bonus* : faire de même avec $y=(10,-4,11), z=(10,-2,9)$.
3. Plus généralement, déterminer $Vect(e_1,\, e_2)$.

Exercice 9:

On considère les vecteurs $u=(-4,4,3)$, $v=(-3,2,1)$, $s=(-1,2,2)$ et $t=(-1,6,7)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $u\in Vect(s,t)$ et $v\in Vect(s,t)$. En déduire que $Vect(u,v)\subset Vect(s,t)$.
2. Montrer alors que $Vect(u,v)=Vect(s,t)$.

Exercice 10:

Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $x=(1,2,1)$, $y=(1,0,1)$ et $z=(k,2,3)$. Déterminer $k\in\mathbb{R}$ tel que $z\in Vect(x,y)$.

Exercice 11: *On complique ...*

1. Dans $\mathbb{R}[x]$, le vecteur P défini par : $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=3x^3-2x^2-4x$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $P_1: x\mapsto 1$, $P_2: x\mapsto (x+1)^2$ et $P_3: x\mapsto x^3$?
   Plus généralement, décrire $Vect(P_1,P_2,P_3)$.
2. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le vecteur $u=(4^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $v=(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v'=(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 12:

Soit $v_1 = (1,1,-1)$, $v_2 = (2,1,3)$ et $v_3 = (0,-1,5)$. La famille (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ? Sinon, quelle relation linéaire lie ces vecteurs ?

Exercice 13: *pour s'entraîner*

Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? Sinon, préciser une relation linéaire liant ces vecteurs.
(a) $\mathcal{F} = ((1,2,1),(2,1,-1),(1,-1,-2))$ (b) $\mathcal{G} = ((1,-1,1),(2,1,-3),(-1,1,-1))$.

Exercice 14: *bonus*

Déterminer l'ensemble des réels k tels que la famille $((1,k,2),(-1,8,k),(1,2,1))$ soit une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15: *On complique ...*

Montrer que les familles suivantes sont libres dans l'espace vectoriel E indiqué.
Dans $E = \mathbb{R}[x]$: 1. $(x \mapsto 3x, x \mapsto x^2-1, x \mapsto x^3)$ 2. $(x \mapsto x+1, x \mapsto x-1)$ 3. $(x \mapsto x^2-1, x \mapsto 2x^2+1, x^2+x)$.
Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: 4. $((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}})$ 5. $(n2^n)_{n\in\mathbb{N}}$
Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: 6. $(x \mapsto x, x \mapsto |x|)$ 7. $(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \cos^3(x))$.

Exercice 16:

1. Montrer de deux manières différentes que la famille $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ avec $\vec{e_1} = (1,1,0)$, $\vec{e_2} = (1,2,1)$, et $\vec{e_3} = (2,3,2)$. Déterminer alors les coordonnées du vecteur $\vec{x} = \big(0,1,-2\big)$ dans cette base.
   On pourra conclure en écrivant la matrice des coordonnées du vecteur $\vec{x}$ dans cette base.
   Quelle est la méthode la plus rapide ?
2. *Pour s'entraîner* : même question avec $\vec{e_1} = (0,1,1)$, $\vec{e_2} = (2,0,-1)$, $\vec{e_3} = (2,1,1)$, et $\vec{x} = (1,-2,-1)$.

Exercice 17:

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les 4 matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que (A,B,C,D) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis écrire la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ dans cette base.
On pourra écrire la matrice des coordonnées du vecteur M dans la base (A,B,C,D).

Exercice 18:

Soit $\mathscr{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \left\{ \begin{array}{ll} 2x+y+z & = 0 \\ 4x+y & = 0 \end{array} \right. \right\}$, ensemble solution du système linéaire associé.
Montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.

Exercice 19: *pour s'entraîner*

Pour chacun des systèmes suivants, justifier que l'ensemble solution $\mathscr{S}$ est un sev de ..., et en déterminer une base. (Choisir l'option la plus rapide !)

$\mathbb{R}^3 : \left\{ \; 3x + y - z = 0 \right.$ $\quad \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{llllll} 2x & & -3z & +t & = 0 \\ x & +y & +z & -t & = 0 \\ & -2y & -5z & +3t & = 0 \\ 3x & +y & -2z & & = 0 \end{array} \right.$ $\quad \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{ll} x+2y-z & = 0 \\ -2x-3y+3z & = 0 \\ x+y-2z & = 0 \end{array} \right.$

Exercice 20:

1. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,2,-1)$, $(3,-1,2)$, $(4,1,1)$, $(2,-3,3)$.
2. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 21:

Soit $A = diag(2,3,-1)$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, AM = MA\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de E.

Pour s'entraîner : même question avec $A = diag(-1,1,0)$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, AM = 0\}$.

Exercice 22:

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de .... et en déterminer une base :
$E_1 = \{x \mapsto bx^2 + ax - a, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$, $\quad E_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \,|\, P(0) = P'(0)\}$
$E_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \,|\, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $\quad E_4 = Vect(x \mapsto 2x+1, x \mapsto x+3, x \mapsto 4x+7)$
$E_5 = Vect((n^2)_{n\in\mathbb{N}}, (2n+1)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Exercice 23:

On considère dans $\mathbb{R}_3[x]$ la famille $\mathcal{B} = \big(x \mapsto 1, x \mapsto x+1, x \mapsto (x+1)^2, x \mapsto (x+1)^3\big)$.

1. Rappeler la formule de Taylor pour un polynôme P de $\mathbb{R}_3[x]$ en $a \in \mathbb{R}$.
2. Choisir $a \in \mathbb{R}$ pour faire apparaître les polynômes de $\mathcal{B}$. Qu'en déduit-on sur la famille $\mathcal{B}$?
3. Montrer alors que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ et écrire le vecteur P défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ dans cette base. *On pourra écrire la matrice des coordonnées du vecteur P dans la base $\mathcal{B}$.*