

**Exercice 1:**

Etudier les limites des fonctions suivantes au point considéré. Lorsque c'est possible, on essaiera plusieurs rédactions (avec et sans les équivalents).

- a)  $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$  en 0      b)  $\frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x}$  en  $-\infty$       c)  $x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$  en  $\pm\infty$
- d)  $x|x| - x^2 + x$  en  $\pm\infty$       e)  $\frac{x^2 + 2|x|}{x}$  en 0 et  $-\infty$       f)  $(1+x)^{1/x}$  en 0      g)  $(1+x)^{\ln x}$  en  $0^+$
- h)  $\frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/3}}$  en 0 et  $+\infty$       i)  $\frac{\ln(1+x)(1+\frac{x}{2})}{x}$  en 0      j)  $\frac{\ln(1+x)}{x^2}$  en  $0^+$       k)  $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$  en  $0^+$  et  $+\infty$
- l)  $\frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$  en 0      m)  $\frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$  en 0 et  $+\infty$       n)  $xe^{1/x} - x$  en  $+\infty$       o)  $\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$  en  $+\infty$
- p)  $4x^2 + \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}$  en 0      q)  $x^4 e^{-\sqrt{x}}$  en  $+\infty$       r)  $\frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}$  en  $+\infty$       s)  $x^3 - 5x^2 - e^x$  en  $-\infty$
- t)  $\frac{\sqrt{1+x} - 1 - x}{x}$  en 0      u)  $\frac{e^x - e^3}{x - 3}$  en 3      v)  $\frac{\ln x}{x^2 - 1}$  en 1      w)  $\frac{x^n - 1}{x - 1}$  en 1      y)  $x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$  en  $+\infty$

**Exercice 2:**

Soient les 8 fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2, f_2(x) = e^x, f_3(x) = e^{-x}, f_4(x) = 5^x, f_5(x) = \ln x, f_6(x) = x^{10}, f_7(x) = (\ln x)^{20}, f_8(x) = \frac{1}{x}.$$

1. Comparer ces fonctions au sens de la négligeabilité au voisinage de  $+\infty$ .
2. Comparer ces mêmes fonctions au sens de la négligeabilité au voisinage de  $0^+$ .
3. Trouver un équivalent en  $+\infty$  de chacune des fonctions  $g$  suivantes :

$$g_1(x) = x^2 - (\ln x)^{20} \quad g_2(x) = \sqrt{x} + 2 + e^{-x} + \ln x + x^2 \quad g_3(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x^3 - 1}}{x^3 + \ln x}$$

$$g_4(x) = x + 2 \sin x \quad g_5(x) = \frac{x^2 + 3}{e^{-x}(\ln x)^{20} + 1}$$

**Exercice 3:**

Etudier les limites des fonctions suivantes au point considéré :

- a)  $x^3 \lfloor x \rfloor$  en 0 (attention la fonction est définie en 0)      b)  $\frac{\lfloor x \rfloor}{x}$  en 0 et  $+\infty$
- c)  $\sin x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  en 0      d)  $\sin\left(\frac{1}{x}\right) e^{\cos x}$  en  $+\infty$       e)  $x(2 + \sin x)$  en  $+\infty$

**Exercice 4: pour aller plus loin**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ .

1. Exprimer  $f(x)$  pour  $x > 1$ . En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Et en  $-\infty$ ?
2. a) Encadrer  $f(x)$  pour  $x > 0$ . En déduire que  $f$  admet une limite à droite en 0.  
b) La fonction se prolonge-t-elle par continuité en 0?

**Exercice 5:**

Soit  $f$  une fonction telle qu'au voisinage de  $+\infty$ , on ait :  $x^2 - \ln(x) \leq f(x) \leq x^2 + 3x$ .  
Déterminer un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .

**Exercice 6:**

On définit la fonction suivante :  $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ \frac{xe^x}{1 - e^x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Peut-elle être prolongée par continuité en 0?

Même question avec les fonctions suivantes au point  $x_0$  (on commencera par préciser leur ensemble de définition) :

$$1. f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}, \text{ en } x_0 = 0$$

et pour s'entraîner :

$$2. f(x) = \frac{|x|}{x}, \text{ en } x_0 = 0$$

$$3. f(x) = \frac{\cos x}{2x - \pi}, \text{ en } x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

**Exercice 7:**

- Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^{\ln(\ln x)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ .
  - Justifier que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ , puis préciser la valeur  $f(1)$ .
  - Montrer que  $f$  est continue au point 1.
- Mêmes questions avec la fonction  $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

**Exercice 8:**

- Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$ .  
Montrer que  $f(x) - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}$ . (On admettra que  $\ln(1+u) - u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} -\frac{u^2}{2}$ .)  
Qu'en déduit-on sur l'allure de la courbe au voisinage de  $+\infty$ ?
- Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$ .  
Déterminer son ensemble de définition puis montrer que  $f(x) - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .  
Qu'en déduit-on sur l'allure de la courbe au voisinage de  $+\infty$ ?

**Exercice 9:**

Déterminer le domaine de définition des fonctions  $f$  suivantes puis leur comportement asymptotique aux bornes de leur domaine de définition. En déduire l'allure de  $C_f$  au voisinage des infinis.

- $f(x) = \ln(1+e^x+e^{2x})$  : commencer par une étude à la main en  $\pm\infty$ , puis montrer que la droite d'équation  $y = 2x$  est asymptote à  $C_f$  en  $+\infty$ .

et pour s'entraîner :

- $f(x) = (x + \ln x)e^{1/x}$  : pour l'étude en  $+\infty$ , déterminer la limite de  $f(x)$ ,  $f(x)/x$  puis  $f(x) - x$  en  $+\infty$ . Interprétation graphique ?
- $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$  : pour l'étude en  $+\infty$ , commencer par une étude à la main, puis montrer que la droite d'équation  $y = 2x$  est asymptote à  $C_f$  en  $+\infty$ . Qu'en est-il en  $-\infty$  ?

**Exercice 10:** pour s'entraîner et réviser le calcul sur les fonctions

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^2}$ .

- Donner l'ensemble de définition de  $f$ , que l'on notera  $\mathcal{D}$ .
- Préciser le signe de  $f$  sur  $\mathcal{D}$ , ainsi que les limites aux bornes de  $\mathcal{D}$ .
- Justifier la dérivabilité de  $f$  sur  $\mathcal{D}$  et déterminer la fonction  $u$  telle que  $\forall x \in \mathcal{D}$ ,  $f'(x) = \frac{u(x)}{x(1+x)^3}$ .
- Dresser le tableau de variations complet de  $u$ .
- Montrer que la fonction  $u$  s'annule en un unique point sur  $\mathcal{D}$ , que l'on notera  $\alpha$ .
- Dresser le tableau de variations complet de  $f$  (en fonction de  $\alpha$ ).

**Exercice 11:** Pour s'entraîner sur les limites et réviser les suites

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{2} \frac{(x+1)\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$

- Déterminer le signe de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
- Montrer que  $f$  est continue en 1.  $f$  se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?
- Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  sur les intervalles  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .
- Soit  $g$  la fonction  $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln(x)$  définie sur  $]0, +\infty[$ .
  - Déterminer les limites de  $g$  en 0 et  $+\infty$ .
  - Dresser le tableau de variations complet de la fonction  $g$  sur  $]0, +\infty[$ .
  - Préciser le signe de  $g$  sur  $]0, +\infty[$ .
- En déduire le tableau de variations complet de  $f$ .
- Déterminer la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- Montrer que, pour tout  $x > 1$ , on a  $\ln(x) < x - 1$ . En déduire que, pour tout  $x > 1$ , on a  $f(x) < x$ .
- Donner la représentation graphique de la fonction  $f$  avec sur le même graphique la droite d'équation  $y = x$ .
- Soit la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = a > 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - Montrer que la suite  $u$  est bien définie et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 1$ .
  - Déterminer la monotonie de la suite  $u$ .
  - En déduire que la suite  $u$  converge et déterminer sa limite.