

*Premiers calculs et résolution d'équations matricielles***Exercice 1:**

Lorsque c'est possible, calculer pour les matrices suivantes les produits AB et BA :

$$1. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \quad 2. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = {}^tA.$$

Exercice 2:

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Développer et simplifier $S = (2A)(3B) - (A + 2B)^2 + (A - B)(A + B)$ et $T = (A + B)(2A^2 - 2B) - 2A^2(A + B) + (-A + B)^2$.

Exercice 3: *pour s'entraîner ... à la maison : important !*

On considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A + B$, $2A - B$, AB , BA , ${}^t(AB)$ et ${}^tB{}^tA$. Vérifier alors l'égalité ${}^tB{}^tA = {}^t(AB)$.
2. Calculer $3(A - 2B) + 2(3B + C) - (2A + C)$ le plus facilement possible.
3. Calculer $(A - I)^2$ puis $(B - 2I)^3$ le plus facilement possible.
4. Résoudre l'équation $A - 3X = 2B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4:

Déterminer toutes les matrices triangulaires supérieures $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5:

1. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A : a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et D la matrice diagonale de taille n de coefficients diagonaux : $1, 2, \dots, n$. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec D .

Exercice 6: *un peu plus abstrait*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

1. Montrer que tous les coefficients de la matrice $A + B$ sont positifs ou nuls.
2. Montrer que tous les coefficients de la matrice AB sont positifs ou nuls.
3. Montrer que tous les coefficients de la matrice ${}^tA{}^tB$ sont positifs ou nuls.

*Puissances de matrice : trois méthodes à découvrir et retenir !***Exercice 7:**

$$\text{Soit } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les premières puissances de J et en déduire une conjecture pour l'expression de J^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Démontrer ce résultat par récurrence.

Exercice 8:

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, et enfin (*) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 9:

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I_3$.

1. Montrer que $B^2 = 3B$.
2. En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = 2^n I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3} B$.

Exercice 10:

1. Soit $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, telle que $X^2 = 0$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(I_p + X)^n = I_p + nX$. 2 méthodes sont attendues !
2. ** Soit $Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, telle que $Y^2 = Y$. Montrer qu'alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(I_p + Y)^n = I_p + (2^n - 1)Y$. idem...
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer et expliciter pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ A^n et B^n .

Exercice 11:

Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12: *pour aller plus loin*

Déterminer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 13:

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$, tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{pmatrix}$.
2. Reconnaître la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire l'expression de A^n en fonction de n .

Inverse de matrices ... et mélange !

Exercice 14:

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^3 - A^2 - A + I = 0$. En déduire que A est inversible et expliciter A^{-1} sous forme de tableau.
2. Que vaut $(A^2)^{-1}$? (2 méthodes attendues)

Exercice 15:

1. Soient A et B deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = 0$. Montrer que ni A ni B n'est inversible.
2. Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $C^2 + C = 0$. En déduire que C n'est pas inversible.

Exercice 16:

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I$.
On précisera les relations de récurrence entre u_{n+1} , v_{n+1} et u_n , v_n .
3. On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$. Reconnaître les suites α et β
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n , puis A^n en fonction de n .

Exercice 17: *pour s'entraîner*

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier $(A - I_4)^2 = 0$. Montrer alors que A est inversible et expliciter la matrice A^{-1} .
2. En remarquant que $A = (A - I_4) + I_4$, calculer A^n pour $n \geq 2$.
La formule est-elle encore vraie pour $n = 0$ et $n = 1$? et $n = -1$?

Exercice 18: *un peu plus abstrait*

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel non nul k tel que $M^k = 0$. Soient A et B deux matrices qui commutent.

1. Montrer que si A est nilpotente alors AB l'est aussi.
2. Montrer que si A et B sont toutes les deux nilpotentes alors $A + B$ l'est aussi.

Exercice 19: *pour aller plus loin*

Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $I - A^p = (I - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.
2. On suppose dorénavant que $A^p = 0_n$ et $A^{p-1} \neq 0_n$ (A est nilpotente d'indice p).
(a) Montrer que A n'est pas inversible.
(b) En utilisant 1., montrer que $I - A$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A .

Exercice 20:

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et le cas échéant, donner leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 21:

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles.

Montrer que $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

sont inversibles et déterminer leur inverse.

Exercice 22: *pour aller plus loin*

Soit A la matrice triangulaire supérieure avec que des 1. Montrer que A est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 23: *un peu plus abstrait*

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

- On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide et on considère $M \in \mathcal{S}$.
 - Montrer, sans effectuer de calculs de tableaux, que $AM = MA$.
 - La matrice A est-elle inversible? Montrer alors que M n'est pas inversible.
 - On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dédurre des deux questions précédentes que $a = d = c = 0$.
- Montrer que $\mathcal{S}$ est vide.

Exercice 24:

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 6u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 4v_n$.

- Montrer qu'il existe une matrice A telle que pour tout n : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$
- Montrer qu'il existe une matrice J qui vérifie : $A = 5I + J$ et $J^2 = 0$.
- En déduire l'expression de A^n sous forme de tableau pour tout n .
(On pensera à vérifier la formule pour $n = 0$ et $n = 1$).
- Obtenir alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n , u_0 et v_0 .

Exercice 25:

On considère la suite u définie par : $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = -1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

- Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} . Que vaut $D = P^{-1}AP$? En déduire D^n .
- Montrer que $\forall n \geq 0, D^n = P^{-1}A^nP$. En déduire les coefficients de A^n .
- (a) Vérifier que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$. En déduire X_n en fonction de A^n et de X_0 .
(b) Déterminer la valeur de u_n en fonction de n .

Exercice 26: *pour s'entraîner*

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .
- Calculer $D = P^{-1}AP$, puis déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Exprimer alors A puis A^n en fonction de D, P, P^{-1} et n .
- En déduire une expression de A^n en fonction de n .
- On considère les suites couplées x, y et z définies par $x_0 = 0, y_0 = 1$ et $z_0 = 2$ et par la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases} \quad \text{On pose également } X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
 - trouver une relation entre X_{n+1}, X_n et A .
 - En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ X_n en fonction de A, n et X_0 .
 - En déduire alors les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}^*$.