Exercice 1:

Ecrire un polynôme de degré 3, de coefficient dominant -3, et de coefficient constant 1.

Exercice 2:

Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

a)$x \mapsto (x+1)^{2n} - x^{2n-1}(x+2n)$ pour $n \geq 2$, b) $x \mapsto \prod_{k=0}^{n}(2x-k)$, c) $x \mapsto (x+1)^n - (x-1)^n$

Exercice 3:

Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré du polynôme Q dans les cas suivants :

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = xP(x) - P'(x)$ (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(x) - xP'(x)$

Exercice 4:

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[x]$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \frac{1}{2}xP'(x)$.

Exercice 5:

Le but de l'exercice est de déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ qui vérifient :
$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x^2) = (x^2+1)P(x)\ (*)$

1. Quelques exemples :
   a) Le polynôme $P : x \mapsto x^3 + x + 1$ est-il solution ?
   b) Le polynôme nul est-il solution ?
   c) Montrer alors qu'aucun polynôme de degré 1 ne peut être solution.
2. Analyse du problème : soit P un polynôme non-nul solution de l'équation $(*)$.
   a) En posant $n = deg(P)$, déterminer la seule valeur de n possible.
   b) En déduire alors tous les candidats.
3. Synthèse du problème : déterminer toutes les solutions.

Exercice 6: *pour s'entraîner*

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes dans $\mathbb{R}[x]$:

a) $x^3 + 1$ par $x^2 + x + 1$ b) $4x^4 + x^3 - 2x^2 - 5$ par $2x^2 + x + 1$.

Exercice 7: *pour s'entraîner*

Déterminer le reste de la division euclidienne de (où $n \in \mathbb{N}$) : a) x^n par $x^2 - 3x + 2$,
b) x^n par $(x-1)^2$, c) $(x-1)^n + (x+1)^n - 1$ par $x^2 - 1$

Exercice 8:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose P la fonction polynômiale définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto P(x) = (x+1)^n$.
Calculer de deux manières différentes la dérivée P' de P. En déduire la somme $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 9:

Sans développer, montrer que le polynôme $P : x \mapsto (x-3)^2 - 2(x-2)^2 + (x-1)^2 - 2$ est le polynôme nul.

Exercice 10:

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) = P(x)$.
Montrer qu'alors P est un polynôme constant. *indication :* poser $Q : x \mapsto P(x) - P(0)$.

Que devient le résultat si P n'est plus un polynôme mais une fonction quelconque définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 11:

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2P(x) = 0$.
a) Montrer que $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$ (on pourra penser à deux méthodes)
b) Ce résultat reste-t-il vrai si P est une fonction quelconque définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 12:

Soit $P,Q \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) = 0$. Montrer que $P = Q = 0$.

Exercice 13: *Factorisation*

1. Montrer que -1 est racine triple de $P : x \mapsto x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2$.
   En déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[x]$.
2. Factoriser dans $\mathbb{R}[x]$ le polynôme $P : x \mapsto x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 8$. *On pourra chercher une racine double.*

Exercice 14:

Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels tels que : le degré de P est 4, son coefficient dominant est 3, 1 est racine au moins double et 2 est racine.

Exercice 15:

Montrer que le polynôme $B = x^2 + 2x - 3$ divise le polynôme $P = x^3 + x^2 - 5x + 3$ dans $\mathbb{R}[x]$: on proposera 3 méthodes. Quelle méthode est la plus simple ?
Même question avec $B = x^2 - 3x + 2$ et $P = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2$, puis avec $B = (x-1)^2$ et $P = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$.

Exercice 16: *Pour aller plus loin : relation coefficients-racines*

Soit $P : x \mapsto x^2 + bx + c$ un polynôme tel que $b^2 - 4ac \geq 0$, et notons r_1 et r_2 ses deux racines (non nécessairement distinctes).
Factoriser le polynôme P à l'aide des racines introduites, puis en développant l'expression obtenue, exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 \times r_2$ en fonction de b et c. Quel est l'intérêt de ces relations ?

Exercice 17:

Soit la suite de polynômes (P_n) définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_1(x) = 1 + x,\ P_2(x) = 1 + x + \frac{x(x+1)}{2}$
et pour tout entier $n \geq 3$, $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!} + ... + \frac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!}$.

1. A l'aide de la définition, écrire les polynômes P_3 et P_4.
2. Déterminer la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n (pour $n \geq 1$).
3. Factoriser le polynôme P_2. *bonus :* faire de même pour P_3.
4. Montrer alors pour tout $n \geq 1$: $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (x + k)$.

Exercice 18: *Un grand classique : polynômes de Tchebycheff*

On considère la suite des polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 : x \mapsto 1$, $P_1 : x \mapsto x$ et
$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} : x \mapsto 2xP_{n+1}(x) - P_n(x)$.

1. Préciser P_2, P_3, P_4.
2. Déterminer pour tout $n \geq 1$, le coefficient dominant de P_n ainsi que son degré. Qu'en est-il pour $n = 0$?
3. a) Exprimer $\cos(a)\cos(b)$ en fonction de $\cos(a + b)$ et $\cos(a - b)$.
   b) Montrer alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
4. * Etudier la parité des fonctions polynômes P_n pour tout $n \geq 0$.
5. ** *bonus :* En déduire les racines de P_n ainsi que sa forme factorisée.

Exercice 19: *Polynômes d'interpolation de Lagrange*

1. Un exemple : Déterminer, en raisonnant par analyse et synthèse, l'unique polynôme P de degré 3 tel que $P(1) = 0$, $P(2) = 0$, $P(3) = 0$ et $P(4) = 1$.
2. Cas général : soit $n \in \mathbb{N}$, et $a_0, a_1, ..., a_n$ $n + 1$ réels 2 à 2 distincts.
   a) En raisonnant par analyse et synthèse, déterminer l'unique polynôme de degré n, noté L_0, tel que $L_0(a_0) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $L_0(a_k) = 0$.
   b) *bonus* : plus généralement, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer l'unique polynôme de degré n, que l'on notera L_k, tel que $L_k(a_k) = 1$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $j \neq k$, $L_k(a_j) = 0$.

Exercice 20:

Soit $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Trouver un polynôme annulateur de M de degré 2. On le choisira unitaire, et on le notera P.
   (b) En déduire que M est inversible et déterminer l'expression de M^{-1}. Comment faire autrement ?
2. (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de $x \mapsto x^n$ par P.
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de M et I_2.

Exercice 21: *Pour aller plus loin, un exercice complet*

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$.

1. ** Déterminer le degré du polynôme $x \mapsto P(x + 1) - P(x)$ en fonction du degré de P.
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x + 1) - P(x) = x^2$.
3. En déduire l'expression de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. *On pourra sommer la relation obtenue en 2.*

Exercice 22: *Un exercice de révisions : trigonométrie, fonctions et polynômes*

1. On note pour tout $x \in I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x))$ et $g(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}$.
   (a) Factoriser dans $\mathbb{R}[x]$ le polynôme P définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ et en déduire son signe sur $\mathbb{R}$.
   (b) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.
   Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.
   (c) En déduire les variations de u sur I.
   (d) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$. Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[x]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$, $v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2+\cos x)^2}$.
   (e) En déduire les variations de v sur I.
   (f) Montrer que : $\forall x \in I,\ g(x) < x < f(x)$.
2. (a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   (b) Déduire de la question 1.(f) un encadrement de π.