

Exercice 1 : Edhec S 2016

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a : $f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2} < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (pas des formes indéterminées)
- (b) Par récurrence immédiate de la propriété : $\mathcal{P}(n) : u_n$ est bien défini et $u_n > 0$
2. Les script calculent les termes successifs de la suite, mais le premier script s'arrête lorsque $u \leq 0.00001$ et le second lorsque $u \geq 100000$, n sert de compteur, il indique l'indice du dernier terme calculé.
Conclusion : $u_5 \leq 0.00001$ et $u_6 \geq 100000$ et ce sont les premiers termes de la suite à vérifier ces inégalités. De telles écarts peuvent nous faire conjecturer que la suite n'admet pas de limite (et même que la suite des termes de rang pair tend vers $+\infty$ et celle des termes de rang impair tend vers 0).
3. (a) g est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction g est donc continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $g(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 1]$
- (b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x$ ssi $\frac{e^{-x}}{x} = x$ ssi $e^{-x} = x^2$ ssi $g(x) = 0$. Or d'après la question précédente 0 possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+$ par g . On le note alors $\alpha \in \mathbb{R}_+$.
- (c) Déterminons le signe de $g\left(\frac{1}{e}\right)$ et $g(1)$:
On a : $g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e} - \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^{1/e}} - \frac{1}{e^2}$, or $\frac{1}{e} < 2$ donc par croissance de la fonction exponentielle $e^{1/e} < e^2$, donc en inversant $\frac{1}{e^{1/e}} > \frac{1}{e^2}$ et donc $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$.
Plus simplement, $g(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$, puisque $e > 2$.
En conclusion : $g(1) < g(\alpha) < g\left(\frac{1}{e}\right)$, or comme g est strictement décroissante on a donc : $1 > \alpha > \frac{1}{e}$.
4. (a) On peut calculer : $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{e}$ et $u_2 = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^{-1/e}}{1/e} = e^{\frac{e-1}{e}}$. Or pour cette dernière, $\frac{e-1}{e} > 0$ donc $e^{\frac{e-1}{e}} > 1$ et on a alors bien $u_2 = f(u_1) > 1$ donc $u_2 > u_0$.
Pour l'autre inégalité, il suffit de remarquer que f est décroissante d'où $u_2 > u_0 \Rightarrow f(u_2) < f(u_0)$ c-à-d $u_3 < u_1$.
- (b) Montrons que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante par récurrence : c-à-d mq $\forall n \in \mathbb{N} : u_{2n+2} > u_{2n}$.
L'initialisation a été faite en (a). Supposons que $u_{2n+2} > u_{2n}$ pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a alors en composant par f (décroissante) : $u_{2n+3} < u_{2n+1}$ et en composant encore une fois par f (décroissante) : $u_{2n+4} > u_{2n+2}$. Conclusion : $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
Pour $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ c'est plus simple : comme $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante on a pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{2n+2} > u_{2n}$ en composant par f (décroissante), on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{2n+3} < u_{2n+1}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est alors bien décroissante.
5. (a) Pour $x > 0$,

$$h(x) = f(f(x)) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} = \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} = x \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{e^{-x}} = x e^{x - \frac{e^{-x}}{x}} = x e^{x-f(x)}$$

De plus, d'après 1., on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = 0$, donc par composition de limite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x)) = 0 = h(0)$, donc h est bien continue en 0. (ou faire directement le calcul de la limite, à l'aide de l'expression de h trouvée).
- (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Si $x = 0$, alors $h(x) = h(0) = 0 = x$ donc 0 est solution.
Si $x > 0$, alors $h(x) = x$ ssi $x e^{x-f(x)} = x$ ssi $e^{x-f(x)} = e^0$ ssi $x - f(x) = 0$ ssi $f(x) = x$ ssi $x = \alpha$.
L'équation $h(x) = x$ n'admet donc que deux solutions sur $\mathbb{R}_+$: 0 et α .
- (c) $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers une limite $l \leq u_1 = \frac{1}{e} < \alpha$ (d'après 3.(c)), de plus $u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$, donc par passage à la limite dans cette relation, l vérifie $h(l) = l$. Donc, compte tenu de ce qui précède et du fait que $l < \alpha$ on a nécessairement $l = 0$.
- (d) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = l' \geq 1 = u_0$, comme par ailleurs $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = h(u_{2n})$, on aurait également $h(l') = l'$. Absurde vu que $0 < \alpha < l'$. Conclusion : $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, de plus, étant croissante, sa limite ne peut être que $+\infty$.

Question préliminaire : si la série de terme général x_n converge, alors $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Comme la suite (x_n) est par ailleurs positive, on en déduit qu'à partir d'un certain rang, $x_n \in [0, 1]$: autrement dit, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in [0, 1]$. D'où pour tout $n \geq N$, $x_n^2 \leq x_n$.

D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq N} x_n^2$ converge, donc la série $\sum_{n \geq 0} x_n^2$ converge.

1. ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Or $e^x - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^{-x} \Leftrightarrow x \geq -x \Leftrightarrow 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. TV : ch admet un minimum en 0 de valeur 1.

2. a) Par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$: $u_0 = 1 > 0$ par hypothèse, et si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{ch(u_n)} > 0$ puisque $ch(u_n) \geq 1 > 0$ d'après le TV. Conclure.

Monotonie : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{ch(u_n)} - u_n = \frac{u_n(1 - ch(u_n))}{ch(u_n)} < 0$, puisque $u_n > 0$ et $ch(u_n) > 1$ ou regarder $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{ch(u_n)} < 1 \dots$

b) La suite u est décroissante et minorée par 0 donc converge : soit ℓ sa limite. Comme la fonction ch est continue sur $\mathbb{R}$, par passage à la limite dans la relation de récurrence, on obtient $\ell = \frac{\ell}{ch(\ell)}$. On résout : $\ell ch(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell(ch(\ell) - 1) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $ch(\ell) = 1 \Leftrightarrow \ell = 0$. La suite u converge vers 0.

3. a) D'après 3.a), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < u_n$ d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et $v_n < 0$.

b) FI 0/0 mais $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{ch(u_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1$ puisque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'où $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

c) $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} [\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)] = \ln(u_n) - \ln(u_0)$ (somme télescopique) $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Donc la série $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + v_n)$ diverge. Comme de plus $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\ln(1 + v_n) \sim v_n$. Enfin, pour tout

$n \geq 0$, $v_n < 0$ et $\ln(1 + v_n) < 0$, donc d'après le critère par équivalence, la série de terme général v_n diverge. Pour respecter rigoureusement le programme, il est préférable de se ramener à des sommes positives en utilisant la linéarité deux fois :

la série $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + v_n)$ diverge donc la série $\sum_{n \geq 0} -\ln(1 + v_n)$ diverge. Or $-\ln(1 + v_n) \sim -v_n$ donc la série de terme général $-v_n$ diverge, donc par linéarité la série de terme général v_n diverge...

4. a) $v_n = \frac{1}{ch(u_n)} - 1 = \frac{1 - ch(u_n)}{ch(u_n)}$. Or d'après l'énoncé $1 - ch(u_n) \sim -\frac{u_n^2}{2}$ car $u_n \rightarrow 0$. Comme de plus, $ch(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, on a $ch(u_n) \sim 1$.

Finalement, on obtient bien $v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$.

b) $u_n^2 \sim -2v_n$, et par linéarité + 4.c), la série de terme général $-2v_n$ diverge. D'après le critère par équivalence pour les séries à termes positifs, la série de terme général u_n^2 diverge.

c) Raisonnons par l'absurde : si la série de terme général u_n convergait, comme de plus la suite u est positive, alors d'après la question préliminaire, la série de terme général u_n^2 convergerait. Ce qui ne peut pas. Donc la série de terme général u_n diverge.

Exercice 3 : Ecrir E 2016

1. (a) g_0 est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ (comme quotient de deux fonctions C^∞ avec un dénominateur non nul), strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ comme inverse d'une fonction strictement croissante et (strictement) positive.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+x)^2} = 0.$$

L'équation de la demi-tangente en 0 est $y = g'_0(0)(x-0) + g_0(0)$. Or, pour tout $x \geq 0$, $g'_0(x) = -\frac{2}{(1+x)^3}$, donc la tangente en 0 a pour équation $y = -2x + 1$.

- (b) Soit $n \geq 1$.

g_n est C^∞ sur $[0, +\infty[$ comme composée, puissance et quotient de fonctions usuelles et

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'_n(x) = \frac{n \frac{1}{1+x} (\ln(1+x))^{n-1} (1+x)^2 - 2(1+x)(\ln(1+x))^n}{(1+x)^4}$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'_n(x) = \frac{\overbrace{(1+x)(\ln(1+x))^{n-1}(n-2\ln(1+x))}^{\geq 0}}{\underbrace{(1+x)^4}_{\geq 0}}$$

D'où $g'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow n - 2\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 2\ln(1+x) \Leftrightarrow 1+x \leq e^{n/2} \Leftrightarrow x \leq e^{n/2} - 1$.

Comme $n/2 > 0$, $e^{n/2} > 1$ et donc $e^{n/2} - 1 \in [0, +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) \underset{\text{en posant } y=1+x}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(\ln y)^n}{y^2} = 0$ par croissances comparées.

- (c) D'après le tableau de variations de g_n , g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ en $e^{n/2} - 1$ qui vaut :

$$M_n = g_n(e^{n/2} - 1) = \frac{(\ln(e^{n/2}))^n}{(e^{n/2})^2} = \frac{(n/2)^n}{e^n} = \left(\frac{n}{2e}\right)^n = e^{n \ln(\frac{n}{2e})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

- (d) Pour tout $n \geq 1$, $\frac{g_n(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} \sim \frac{(\ln(1+x))^n}{x^{1/2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (croissances comparées), donc $g_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

2. (a) Soit $A > 0$. $\int_0^A g_0(t)dt = \int_0^A \frac{1}{(1+t)^2}dt = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^A = -\frac{1}{1+A} + 1 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$, donc $I_0 = \int_0^{+\infty} g_0(t)dt$ converge et vaut 1.

- (b) Soit $n \geq 1$.

• g_n et $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$.

• $g_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ d'après 1d.

• Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}dt$ converge (Riemann et $3/2 > 1$), donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} g_n(t)dt$ converge aussi.

• Enfin, comme g_n est continue sur $[0, 1]$, $\int_0^1 g_n(t)dt$ existe.

Par suite, $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ converge.

- (c) Soit $A > 0$.

Posons $u(t) = (\ln(1+t))^{n+1}$, $u'(t) = \frac{(n+1)}{1+t}(\ln(1+t))^n$, $v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$, $v(t) = -\frac{1}{1+t}$.

Comme u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$, on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^A g_{n+1}(t)dt &= \left[-\frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{1+t}\right]_0^A + \int_0^A \frac{(n+1)}{1+t}(\ln(1+t))^n \frac{1}{1+t}dt \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1) \int_0^A g_n(t)dt. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A g_{n+1}(t)dt = I_{n+1}$, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A g_n(t)dt = I_n$ (car I_n et I_{n+1} convergent)

et $\lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} = 0$ (par croissances comparées),

donc, en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient bien : $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

- (d) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$ (HR_n).

Initialisation : On a $I_0 = 1$ et $0! = 1$, donc on a bien HR_0 .

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons HR_n vérifiée. Alors $I_{n+1} = (n+1)I_n \underset{HR_n}{=} (n+1)n! = (n+1)!$

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.

3. (a) f_n est nulle donc positive sur $\mathbb{R}_-$, et f_n est positive comme g_n sur $\mathbb{R}_+$. De plus, f_n est continue (comme fonction constante) sur $\mathbb{R}_*$, et est continue comme g_n sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, f_n est nulle sur $\mathbb{R}_-$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^0 f_n$ converge et vaut 0.

Et on sait déjà que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ converge donc par linéarité $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ converge et $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt =$

$$\frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \frac{1}{n!} n! = 1.$$

(b) Soit $n \geq 1$.

- $t \mapsto tf_n(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$.
 - $\frac{1/t}{tf_n(t)} = \frac{n!(1+t)^2}{t^2(\ln(1+t))^n} \sim \frac{n!}{(\ln(1+t))^n} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc $\frac{1}{t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}(tf_n(t))$.
 - Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge (Riemann de paramètre $1 \leq 1$), donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} tf_n(t) dt$ diverge aussi.
- Donc $\int_0^{+\infty} tf_n(t) dt$ diverge, donc X_n n'admet pas d'espérance.

(c) pour tout $x < 0$, $F_0(x) = \int_{-\infty}^x f_0(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$ et pour tout $x \geq 0$, $F_0(x) = \int_{-\infty}^x f_0(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2} dt = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ (cf calculs en 2a).

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $x < 0$, $F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

(e) En reprenant les calculs faits en 2c (en remplaçant n par $k-1$ et A par x , on obtient :

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \frac{1}{k!} \int_0^x g_k(t) dt = \frac{1}{k!} \left(-\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + k \int_0^x g_{k-1}(t) dt \right) \\ &= -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x g_{k-1}(t) dt = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + F_{k-1}(x), \end{aligned}$$

$$\text{et on a donc bien : } F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.$$

(f) En sommant l'égalité précédente pour $k = 1..n$, on obtient : $\sum_{k=1}^n (F_k(x) - F_{k-1}(x)) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$,

et donc, en télescopant à gauche de l'égalité : $F_n(x) - F_0(x) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$, et donc $F_n(x) =$

$$F_0(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.$$

(g) Quand $x < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Pour } x > 0, F_n(x) &= 1 - \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^n \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} e^{\ln(1+x)} = 1 - \frac{1+x}{1+x} = 0. \end{aligned}$$

(la série exponentielle converge en tout réel)

4. (a) On a presque sûrement $X_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$, donc $(1+X_n)(\Omega) = [1, +\infty[$, donc $Y_n = \ln(1+X_n)$ est bien définie et $Y_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(\ln(1+X_n) \leq x) = P(1+X_n \leq e^x) = P(X_n \leq e^x - 1) = F_n(e^x - 1)$.

(c) H_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points comme composée de F_n (qui est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de point (fonction de répartition de X_n)) et de $x \mapsto e^x - 1$ (qui est C^1 sur $\mathbb{R}$).

Y_n est donc une variable à densité et une densité de Y_n est

$$h_n : x \mapsto e^x f_n(e^x - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^x - 1 < 0 \\ e^x \frac{1}{n!} \frac{(\ln(1+e^x-1))^n}{(1+e^x-1)^2} & \text{si } e^x - 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^n e^{-x}}{n!} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(d) $h_0 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ On reconnaît la densité d'une loi $\mathcal{E}(1)$, donc $Y_0 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Exercice 4 : Ecricome E 2012

A.

- On a $e^h = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + o(h^3)$ donc $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ et $1 - e^{-x} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
Finalement, pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$.
- f est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues donc le dénominateur ne s'y annule pas.
Puis en 0, d'après le DL, on obtient que pour $x \neq 0$, $f(x) \rightarrow 1 = f(0)$. Donc f est continue en 0.
De même, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et en 0, comme f est continue en 0, et que f admet un DL d'ordre 1 en 0, on sait que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$ (coefficient devant le x).

Remarquer qu'on sait même avec le DL que la courbe est au-dessus de sa tangente en 0 localement, car $\frac{1}{6} > 0$. Ici, vu que cette position n'est pas demandée, un DL à l'ordre 1 (et non à l'ordre 2) aurait suffi. Mais le sujet était ainsi ...

- On trouve pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{e^{-x}x - (1 - e^{-x})}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}$ avec $\varphi(x) = e^{-x}(x+1) - 1$.
Or φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi'(x) = -e^{-x}(x+1) + e^{-x} = -xe^{-x} \leq 0$ pour $x > 0$

x	0	
$\varphi'(x)$	0	—
$\varphi(x)$	0	$\searrow$ —
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	—
$f(x)$	1	$\searrow$ 0

et en $+\infty$: $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$ (pas de FI!)

B.

- Pour minorer l'intégrale, on travaille sur l'intérieur. D'où peut venir le $\ln$? D'où viendra le $\frac{1}{e}$?
Pour tout $t \in [0, n]$: $t \leq n$ donc $\frac{t}{n} \leq 1$ et $-\frac{t}{n} \geq -1$ donc par croissance de l'exp $e^{-\frac{t}{n}} \geq e^{-1}$ et par positivité de $\frac{1}{1+t}$, $\frac{e^{-\frac{t}{n}}}{1+t} \geq e^{-1} \frac{1}{1+t}$.
Comme les bornes sont croissantes on a alors par intégration,
 $u_n \geq e^{-1} \int_0^n \frac{1}{1+t} dt = e^{-1} [\ln(1+t)]_0^n = e^{-1} \ln(n+1)$.

Par comparaison, comme $\ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

- D'après la partie A. f est continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 f(x) dx$ existe
- On fait réapparaître l'intégrale pour u_n :

$$I = \int_0^n \frac{1}{1+t} dt - u_n = \int_0^n \left[\frac{1}{1+t} - \frac{e^{-t/n}}{1+t} \right] dt \text{ (par linéarité)} = \int_0^n \frac{1-e^{-t/n}}{1+t} dt.$$

On pose alors $x = \frac{t}{n}$ ($\Leftrightarrow t = nx$) d'où $dx = \frac{1}{n} dt$ ($\Leftrightarrow dt = n dx$) et les bornes : $t = 0 \Rightarrow x = 0$ et $t = n \Rightarrow x = 1$
d'où $I = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{1+nx} n dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x} dx$.

Or $\frac{1}{n} \geq 0$ donc pour tout $x > 0$, $\frac{1}{n} + x \geq x > 0$ donc $0 \leq \frac{1}{\frac{1}{n}+x} \leq \frac{1}{x}$

et $0 \leq \frac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x} \leq \frac{1-e^{-x}}{x} = f(x)$ car $1-e^{-x} \geq 0$.

Par intégration, comme $0 < 1$, (toutes les intégrales existent car la fonction présente dans l'intégrale de droite se prolonge par continuité), $0 \leq I = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x} dx \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx = \int_0^1 f(x) dx$.

C'est-à-dire : $0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+t} dt - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx$.

- Par 3., en calculant l'intégrale, on a finalement $0 \leq \ln(n+1) - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx$

d'où $0 \leq 1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \int_0^1 f(x) dx$.

Comme $\int_0^1 f(x) dx \in \mathbb{R}$ est une constante par rapport à n , $\frac{1}{\ln(n+1)} \int_0^1 f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et le théorème d'encadrement permet de conclure que $1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ c'est-à-dire que $\frac{u_n}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

On obtient : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n+1)$.

Exercice 5 Edhec S 2001(éléments de correction)

1. a) $k \leq t \leq k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ et par croissance de l'intégrale ($k \leq k+1$),
 $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$ d'où le résultat.
- b) On somme l'inégalité ci-dessus pour $1 \leq k \leq n-1$: $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$
d'où $\sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq v_n - \frac{1}{n}$
puis $v_n - 1 \leq [\ln t]_1^n \leq v_n - \frac{1}{n}$, d'où le résultat.
- c) l'encadrement obtenu en b), se réécrit : $\ln n + \frac{1}{n} \leq v_n \leq \ln n + 1$
d'où pour $n \geq 3$ (afin d'avoir $\ln n > 0$), $1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{v_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$.
Le théorème d'encadrement permet de conclure : $\frac{v_n}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ d'où $v_n \sim \ln n$.
2. a) Poser $h : x \mapsto (x-1) - \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Faire le TV de h : h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$
donc h admet un minimum en 1 de valeur $h(1) = 0$. Donc h est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b) $w_n - w_{n+1} = v_n - \ln n - v_{n+1} + \ln(n+1) = -\frac{1}{n+1} - \ln(\frac{n}{n+1})$.
Par ailleurs, le a) appliqué à $x = \frac{n}{n+1}$ donne : $\ln(\frac{n}{n+1}) \leq \frac{n}{n+1} - 1 = -\frac{1}{n+1}$,
càd $-\frac{1}{n+1} - \ln(\frac{n}{n+1}) \geq 0$, d'où le résultat.
- c) $\ln(1+x) - x \frac{1}{1+x} = (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - x(1 - x + x^2 + o(x^2)) = \dots = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim \frac{1}{2}x^2$
- d) $w_n - w_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{1+1/n} \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$.
3. a) critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$).
- b) Comme la série converge, par définition, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n-1} w_k - w_{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
Or on reconnaît une somme télescopique d'où $w_1 - w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et finalement, $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ell + w_1 \in \mathbb{R}$.
Donc la suite (w_n) converge.
4. Rappel : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sim \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3}$ d'où $0 \leq u_n \sim \frac{3}{n^3}$. Critère d'équivalence ($3 > 1$)...
5. a) Mettre au même dénominateur puis identifier : on trouve $a = 6 = b$ et $c = -24$
- b) partir de $v_{2n+1} - \frac{1}{2}v_n - 1 = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - 1 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) - 1$
 $= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1}$.
- c) par a), $\sum_{k=1}^n u_k = a \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + b \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + c \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = 6v_n + 6(\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}) - 24(v_{2n+1} - \frac{1}{2}v_n - 1)$
 $= 6v_n + 6(v_n - 1 + \frac{1}{n+1}) - 24v_{2n+1} + 12v_n + 24 = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - 6\frac{n}{n+1}$.
6. $v_n - v_{2n+1} = w_n + \ln n - w_{2n+1} - \ln(2n+1) = w_n - w_{2n+1} + \ln(\frac{n}{2n+1}) = w_n - w_{2n+1} + \ln(\frac{1}{2+1/n})$
 $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma - \gamma + \ln(1/2) = 0 - \ln 2$.
- Finalement, on obtient $\sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 24(-\ln 2) + 24 - 6 = 18 - 24 \ln(2)$