Toute la partie CALCUL de ce chapitre a été regroupée dans la feuille CALCUL. Ici, les exercices porteront sur les résolutions d'équations/inéquations, la construction d'inégalités ainsi que sur les études de fonctions.

Exercice 1:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1) : 3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$ $(E_2) : (\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0$ $(E_3) : e^x + e^{-x} = 2$

$(E_4) : \ln(3x) + \ln(x-1) = \ln(2) + 2\ln(3)$ $(E_5) : |x^2 + x + 1| = |x|$ $(E_6) : |2x+1| = x - 4$

$(E_7) : x = \sqrt{x} + 2$ $(E_8) : \sqrt{x^2 - 9} = 4 - x$ $(E_9) : \sqrt{|x^2 - 1|} = x - 5.$

$(E_{10}) : 3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0$

Exercice 2:

1. Rappeler les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
   En déduire les formules donnant $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$ puis celles donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a)\sin(b)$.
2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi[$ l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi[$ puis l'équation $\sin(6x) = 1$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :
   a) $2\cos(3x + \frac{\pi}{6}) = 1$, b) $\sin x + \sin(2x) = 0$, c) $2\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1 = 0$.
   Pour s'entraîner :
4. a) Résoudre dans $]0, \pi[$, l'équation $\cos(5x) = 0$. On précisera le nombre de solutions.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre alors dans $]0, \pi[$, l'équation $\cos(nx) = 0$. On précisera le nombre de solutions.
5. ** Résoudre dans $[0, 2\pi]$ les inéquations trigonométriques suivantes :
   a) $\cos(2x) \leq 0$, b) $\sin(x) \geq -\frac{1}{2}$.

Exercice 3:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(I_1) : x^3 + 5x \leq 6x$ $(I_2) : \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x(x+1)} \leq 1$ $(I_3) : 3 \times 2^{3x-4} \geq 7^8$

$(I_4) : |x^2 - 2| \geq 2$ $(I_5) : |x+4| \leq 5 - 3x$ $(I_6) : |x-3| + |x^2 - 3x + 2| \leq 2$

$(I_7) : x - 4\sqrt{x-2} \geq 0$

Exercice 4: *Avec un paramètre*

Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes selon $m \in \mathbb{R}$:

1. $mx^2 + x - m = 0$
2. *Pour s'entraîner :* $mx^2 + x\,(2m-1) - 2 = 0$
3. $x^2 - mx + (m+1) = 0$
4. $(m^2 - 1)x < m + 1$
5. $(m+1)2^x = 1 - m$

Exercice 5: *Pour s'entraîner : pot pourri*

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^*$ distincts, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} > 2$.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x - y| \leq 1$ et $4 \leq |y| \leq 6$. Montrer que $3 \leq |x| \leq 7$.

Exercice 6:

1. Donner l'ensemble de définition et l'expression des composées $f \circ g$ et $g \circ f$, avec f et g comme suit.
   (a) $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x + 1$ (b) $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto \ln(x)$
2. Donner la monotonie de $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ sur $]1, +\infty[$ (on pensera à 3 méthodes).

Exercice 7:

1. Montrer que $\forall x \geq 1$, $\ln(x) \leq \sqrt{x}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, $1 - x + \frac{x^2}{2} \leq e^{-x}$

Exercice 8:

1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ est paire.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$ est impaire.
3. ** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.
   En déduire que la fonction $f : x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9: **A propos de la partie entière*

1. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq d(x) \leq 1$. Résoudre alors l'équation $d(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que d est 1-périodique et la représenter graphiquement.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\lfloor x \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor$.
   (b) Plus généralement, montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

Exercice 10: *Pour s'entrainer*

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivée.
   $f : x \mapsto x\ln(\frac{x+2}{3x-1})$ $\quad g : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ $\quad h : x \mapsto (\ln x + 1)^2 e^{\frac{1}{x}+2x}$
   $u : x \mapsto \cos(\sqrt{1-x^2})$ $\quad v : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{x^2+5}}$
2. (a) Résoudre l'équation $1 - e^{-2x} = 0$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Etudier la fonction $g : x \mapsto 1 - (x+1)e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) En déduire l'étude des variations de $f : x \mapsto \frac{x^2}{1-e^{-2x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (d) *bonus* : étudier la fonction g sur $\mathbb{R}$ puis f sur $\mathbb{R}^*$.
3. Etude complète de $f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x+1)$: TV, limites, asymptote en $+\infty$ et position relative, allure de la courbe.
4. Etudier les fonctions suivantes (ensemble de définition, TV) :
   $f : x \mapsto \sqrt{2 - \ln x}$ $\quad g : x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}}$ $\quad h : x \mapsto \ln(e^x - e^{-x})$
   $u : x \mapsto \sqrt{x - \sqrt{x}}$ $\quad v : x \mapsto \dfrac{x}{x - \ln x}$

Exercice 11: *Pour s'entraîner, exercice plus complet*

Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_\varphi$ de définition de φ.
2. Déterminer les limites de φ en -1 et 1. Interprétation graphique ?
3. (a) Rappeler la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$ (*on pourra poser un $X = ...$*)
   (b) Récrire judicieusement φ pour en déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varphi(x) = -1$.
4. On introduit sur $]-1, 1[$ la fonction h définie par $h(x) = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_\varphi$, $\varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{(1-x^2)(\ln(1-x))^2}$.
   (b) Calculer h' sur $]-1, 1[$.
   (c) Résoudre sur $]-1, 1[$ l'inéquation $\ln(1-x) < \ln(1+x)$. En déduire le signe de h'.
   (d) Dresser le tableau de variations de h. En déduire le signe de h.
   (e) Déterminer la limite de h à gauche en 1, en posant $X = 1-x$.
   (f) Donner le tableau de variations de φ.
5. Dessiner l'allure de φ.
6. Résoudre sur $\mathcal{D}_\varphi$ l'équation $\varphi(x) = -2$.