Feuille d'exercices 3 : Suites

Exercice 1:

Indiquer si les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont majorées, minorées et préciser leurs bornes supérieures et inférieures éventuelles : $A = \{\frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ $\quad B = \{(-1)^n(1-\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$ $\quad C = \{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 2:

On définit la suite u par $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{4}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - (\frac{-1}{3})^n$. En déduire sa limite.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné. Déterminer sa borne inférieure et supérieure.

Exercice 3:

Soit u une suite bornée, et v une suite convergente vers 0. Montrer à l'aide d'un encadrement : $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 4: *pour s'entraîner*

Reconnaître les suites suivantes, et déterminer leur expression en fonction de n.
bonus : calculer alors la somme des n premiers termes de la suite.

$\forall n \geq 2$, $2b_n = b_{n-1}$ avec $b_1 = 3$ $\qquad \forall k > 0$, $c_{k+1} - c_k = 3$ et $c_1 = 10$ $\qquad \forall j \geq 1$, $3u_j - 2u_{j-1} = 1$ avec $u_0 = 1$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $2f_{n+2} + f_{n+1} - f_n = 0$ avec $f_0 = f_1 = 1$ $\qquad \forall p \in \mathbb{N}$, $h_{p+2} = 2h_p$ avec $h_0 = 1$ et $h_1 = 0$

Exercice 5:

Pour chacune des suites réelles suivantes, exprimer u_n en fonction de n (càd trouver la forme explicite) :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} u_n \end{cases}$ et *pour s'entraîner :* $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \end{cases}$

Exercice 6:

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.
Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire v définie par $v_n = \frac{u_n}{3^n}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Reconnaître la suite v.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. *bonus :* calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

Exercice 7:

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = (u_n)^3$. Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire v définie par $v_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \geq 0$.
Montrer que la suite (v_n) est bien définie, puis la reconnaître. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 8:

On introduit la suite u par : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_n \times u_{n+1}}$.

1. Montrer que la suite u est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Reconnaître la suite $(\ln(u_n))$. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9:

On considère la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3}$.

1. Démontrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq u_n < 2$.
2. Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ est définie et arithmétique.
3. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 10:

On pose $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{u_n + 4}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
2. Montrer que $u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow u_n = 1$. En déduire que pour tout n, u_n est différent de 1.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est définie et géométrique.
   En déduire pour tout n l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 11:

On pose pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \cos(\frac{\pi}{2^k}) = \cos(\frac{\pi}{2^2}) \times \cos(\frac{\pi}{2^3}) \times ... \times \cos(\frac{\pi}{2^n})$, et $v_n = u_n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
2. Montrer que la suite u est monotone. En déduire qu'elle converge.
3. Montrer que la suite v est géométrique. En déduire la forme explicite de u_n pour tout entier $n \geq 2$.
   Bonus : déterminer la limite de la suite u.
   On pourra utiliser que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ ou attendre les équivalents usuels ...

Exercice 12:

On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 2$, $y_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = -2x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n \end{cases}$.

1. Montrer que la suite (x_n) est récurrente linéaire d'ordre 2.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de x_n puis de y_n en fonction de n.

Exercice 13:

Déterminer les limites des suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}$, $v_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$
$w_n = n - \sqrt{n^2+n+1}$ et $t_n = \sqrt{n+\cos(n)} - \sqrt{n}$.

Exercice 14:

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite éventuelle de $\dfrac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + ... + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$.

Exercice 15: *pour s'entraîner*

1. Trouver deux suites u et v telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et

(a) $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (b)$u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ (c) $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (d) $u_n + v_n$ n'a pas de limite.

2. Trouver deux suites u et v telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et

(a)$u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (b)$u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ (c)$u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (d)$u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (e) u_nv_n n'a pas de limite

Exercice 16: *pour s'entraîner*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante qui converge vers 1.
En raisonnant par l'absurde, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$.

Exercice 17:

Soit u la suite définie pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+5u_n}$ et $u_0 > 0$.

1. Montrer que $\forall n \geq 0$, u_n existe et $u_n > 0$. En déduire la monotonie de u.
2. La suite est-elle convergente ? Calculer sa limite.
3. Montrer que $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} \leq \frac{2u_n}{5}$ puis que $\forall n \geq 0$, $u_n \leq (\frac{2}{5})^n u_0$. Retrouver le résultat de 2.

Exercice 18:

Soit la suite v définie par $v_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(1+v_n^2)$.

1. Déterminer la monotonie de la suite.
2. Montrer que la suite v ne peut pas être majorée. En déduire la limite de v_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 19:

Soit $a > 0$ et la suite u définie par $u_0 > \sqrt{a}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$.

1. Montrer que la suite a est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{a}$.
2. Montrer alors que la suite u décroit et converge vers $\sqrt{a}$.
3. ** *bonus :* Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{(u_n-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$.
   En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $u_n - \sqrt{a}$ par une expression dépendant de n, a et u_0.

Exercice 20:

Soit a et b deux nombres réels vérifiant : $0 < a < b$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par :
$u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n \leq v_n$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
3. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq (\frac{1}{2})^n(b-a)$.
4. Déduire des questions précédentes que les deux suites sont convergentes et ont la même limite.
5. Montrer que la suite (u_nv_n) est constante. En déduire la limite commune des deux suites.

Exercice 21: *Suites et fonctions*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{2+x}$, et u la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f, et résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, puis déterminer la monotonie de la suite u.
3. Conclure quant à la convergence de la suite u, et déterminer sa limite.
4. Représenter alors la fonction f, la droite d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite.
5. Etudier de même la suite v définie par $v_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

Exercice 22:

Soit $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = x + \frac{1}{x} - 1$ et u la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f, puis montrer que $\forall x \geq 1$, $f(x) - x \leq 0$. Cas d'égalité ?
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

3. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis déterminer sans calcul sa limite. Qu'en est-il pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 23: *Suites et sommes*

Poser pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Que vaut u_1, u_2 ?

1. Montrer que la suite u est décroissante. En déduire qu'elle converge.
2. A l'aide d'un encadrement simple de u_n, montrer que la limite appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 24:

A l'aide d'un encadrement, montrer que les suites u suivantes sont convergentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3+k^2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

Exercice 25:

Etudier les variations des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes, et en déduire leur nature : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et **$u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Exercice 26:

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.
2. En déduire que la suite u converge.

Exercice 27: *

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}u_n$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Que vaut u_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$? Le démontrer.
3. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercice 28:

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Conclure quant à la convergence de la suite (S_n).

Exercice 29:

1. Comparer en $+\infty$ les suites de termes généraux suivants : $\ln(n)$ e^n n^2 $(\ln n)^{10}$ 5^n n et $n!$.
2. Trouver un équivalent simple de u_n dans les cas suivants :
   (a) $u_n = n^2 - (\ln(n))^{10}$ (b) $u_n = n! - 100^n + n^{100}$ (c) $u_n = e^n - 1$
3. A l'aide des équivalents usuels, trouver un équivalent simple de u_n dans les cas suivants :
   (a) $u_n = \ln(n+1) - \ln(n+3)$ (b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (c)$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
4. Calculer la limite de la suite u définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\ln(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}})$.

Exercice 30:

Soit u une suite vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq n^2 + n$.
Déterminer un équivalent de la suite (u_n).

Exercice 31: `inspiré d'Edhec E 2001`

On considère une suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. (a) Montrer que cette suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
2. (a) Pour tout entier k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 = 2n + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n^2 \geq 2n + 1$. En déduire la limite de la suite u.
   Comment aurait-on pu trouver autrement la limite de la suite (u_n) ?
3. (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$
   (b) En admettant que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$, établir que, pour tout entier $n \geq 3$: $u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$.
   (c) En déduire finalement que $u_n^2 \sim 2n$ quand $n \to +\infty$, puis donner un équivalent de u_n.
4. Ecrire une fonction Python qui à un entier n renvoie la valeur de u_n.