

Premiers exercices**Exercice 1:**

Soit Y une variable aléatoire prenant les valeurs 2,4,6,8. Déterminer la loi de Y sachant que : $P(Y < 6) = 1/4$; $P(Y > 6) = 1/2$ et $P(Y = 2) = P(Y = 4)$. Calculer alors $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 2:

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement et sans remise 5 boules. Soit B (resp. N) la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches (resp. noires) obtenues.

a) Déterminer la loi de B puis calculer $E(B)$.

b) Trouver une relation liant B et N . En déduire la loi de N ainsi que son espérance.

bonus : que deviennent ces résultats lorsque les tirages se font avec remise ?

Exercice 3:

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires.

Expliciter la loi de X et son espérance.

Exercice 4:

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et à valeurs dans $\llbracket 1, 10 \rrbracket$ dont la loi vérifie : $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \alpha \times k$.

1. Calculer α .

2. Déterminer l'espérance et la variance de X . On pourra utiliser la formule : $\sum_{k=1}^n k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.

3. Déterminer la loi, l'espérance puis la variance de $Y = X + 1$.

Avec la lettre n

Exercice 5:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boîtes $B_1, \dots, B_n$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la boîte B_k contient k jetons numérotés de 1 à k . On choisit au hasard une boîte puis on tire un jeton. On note X la variable égale au numéro du jeton obtenu. Déterminer la loi de X . (on pourra commencer par déterminer $P(X = 1)$...)

Exercice 6:

Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.

2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.

3. Trouver un lien entre Z et X , et en déduire sans calcul la loi de Z .

Exercice 7:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé : on jette n fois une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$. Soit X la variable égale au numéro du premier lancer qui donne pile, si l'on obtient au moins un pile, et qui vaut $n + 1$ sinon.

1. Déterminer la loi de X et vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{n+1} P(X = k) = 1$.

2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, rappeler $\sum_{k=0}^n x^k$ puis montrer $\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. Déduire l'espérance de X .

Exercice 8: pour s'entraîner

On dispose d'une urne qui contient des boules blanches et noires, avec une proportion de boules blanches égale à $1/3$. Un joueur mise au départ s euros, avec $s \in \mathbb{N}, s \geq 2$. Il tire une à une, successivement et avec remise, des boules de l'urne, chaque tirage lui coûtant 1 euro. Le jeu s'arrête dans deux cas : soit lorsque la somme restant dans la mise est nulle, soit lorsqu'il tire une boule blanche. Le joueur perçoit alors le triple de la somme restant dans la mise. On introduit la variable X égale au nombre de tirages effectués par le joueur, et T la variable aléatoire égale à la somme perçue par le joueur.

1. Déterminer la loi de X . *bonus* : déterminer $E(X)$. (On pourra reprendre la formule de l'exercice 7).

2. Exprimer T en fonction de X . Quel est le gain relatif moyen du joueur (mise incluse) ?

Exercice 9: * Variante courte Edhec E 2005

Un mobile se déplace sur un axe comme suit : à l'instant 0, il est au point 0. Puis, si le mobile est à l'instant n sur le point d'abscisse k , alors à l'instant $n + 1$, il sera sur le point d'abscisse $k + 1$ avec probabilité $p \in]0, 1[$ et en 0 sinon. On appelle X_n la variable égale à l'abscisse du mobile à l'instant n . On a donc $X_0 = 0$.

1. Donner la loi de X_1 .

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X_n = k) = pP(X_{n-1} = k - 1)$.

4. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(X_n) = pE(X_{n-1}) + p$ puis déterminer $E(X_n)$ en fonction de n et p .

Lois usuelles finies

Exercice 10:

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$. Donner le tableau de la loi de X , puis calculer $P(X \leq k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(2, \frac{1}{4})$. Donner le tableau de la loi de X puis calculer $P(X \leq k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$.
3. Plus généralement, soit X une variable telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X \leq k) = \sum_{k=0}^n P(X = k)$.
4. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \llbracket 1, 5 \rrbracket$, $P(X \leq 1) = \frac{1}{6}$, $P(X \leq 2) = \frac{1}{4}$, $P(X \leq 3) = \frac{1}{2}$ et $P(X \leq 4) = \frac{5}{6}$. Déterminer la loi de X .
5. Plus généralement, soit X une variable telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$.

Exercice 11:

1. Un cycliste rencontre 5 feux de circulation sur le boulevard de Strasbourg. La probabilité qu'un feu soit vert est de $\frac{1}{2}$, et ce indépendamment des autres feux. On note X le nombre de feux verts pour le cycliste. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Dans un magasin de matériel informatique, chaque boîte de CD a la probabilité $\frac{1}{20}$ de contenir au moins un CD défectueux et ce indépendamment des autres boîtes. Régulièrement, un client achète n boîtes de CD. S'il constate qu'un CD est défectueux, il rapporte toute la boîte au magasin. Comment choisir n , pour qu'en moyenne, il ait au plus une boîte à rapporter ?

Exercice 12:

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Déterminer (puis reconnaître) la loi de $Y = n - X$.

Exercice 13:

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $Y = 2^X$, et de $Z = \frac{1}{X+1}$.

Exercice 14:

A l'aide des lois usuelles, donner les valeurs des sommes suivantes sans les calculer :

$$S_1 = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad S_2 = \sum_{k=0}^n (k^2 + k) \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{k=0}^n (2k + 1) \binom{n}{k} 3^k.$$

Exercice 15:

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Les résultats de X sont censés être affichés par un compteur mais celui-ci est détraqué : lorsque X prend une valeur non nulle, le compteur affiche la bonne valeur de X , mais lorsque X prend la valeur 0, le compteur affiche un entier au hasard entre 1 et n .

On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Montrer que $E(Y) \geq E(X)$.

Exercice 16:

Une puce se déplace sur un axe gradué : initialement à l'origine, elle se déplace d'une unité sur la droite avec probabilité $p \in]0, 1[$, ou de deux unités sur la droite avec probabilité $1 - p$.

On note X_n sa position après n sauts, et Y_n le nombre de sauts d'une unité parmi ces n sauts.

1. Déterminer la loi de Y_n puis trouver une relation entre X_n et Y_n .
2. Donner sans calcul l'espérance et la variance de X_n . *bonus* : trouver la loi de X_n .

Exercice 17:

Deux personnes A et B sont séparées par $n \in \mathbb{N}^*$ individus $I_1, I_2, \dots, I_n$. Pour dire un message à B , A le transmet à I_1 , qui le transmet à I_2 , ... qui le transmet à I_n , qui le transmet à B . Chacun des individus $I_1, \dots, I_n$ transmet (indépendamment des autres) la réponse entendue avec probabilité $p \in]0, 1[$ et le contraire sinon.

1. Calcul préliminaire : déterminer $\frac{1}{2}(1 + (-1)^k)$ pour tout entier k .
2. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre d'individus qui transmettent le contraire de la réponse qu'ils ont entendue. Déterminer la loi de X_n .
3. Dédurre des questions précédentes, la probabilité p_n que la réponse transmise à B soit la bonne.
4. Déterminer la limite de p_n quand $n \rightarrow +\infty$. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 18: pour aller plus loin, plus abstrait, mais important

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$, et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$.
2. Montrer alors que $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$
3. Variante : après avoir adapté 1., montrer que $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$.

Exercice 19: pour préparer le dernier chapitre de probabilités

On pose n questions à un candidat. Les questions sont indépendantes, et pour chaque question, le candidat a une probabilité p de répondre juste. Soit X le nombre de bonnes réponses du candidat. Puis, on lui repose les questions non trouvées : il a alors une probabilité q de fournir la bonne réponse. Soit Y le nombre de bonnes réponses lors de cette deuxième manche.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer $P_{(X=k)}(Y = j)$ pour tout $j \in \llbracket 0, n - k \rrbracket$. Que vaut $P_{(X=k)}(Y = j)$ sinon ?
3. Vérifier que $\binom{n}{k} \binom{n-k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k}$.
4. A l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer la loi de Y .
5. *bonus* : donner le nombre moyen de bonnes réponses du candidat à l'issue des deux manches.

Compléments de dénombrement**Exercice 20:**

On lance un dé équilibré quatre fois de suite. Préciser l'univers associé à cette expérience. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 numéros différents ? Quatre fois le même numéro ?

Exercice 21:

On effectue trois tirages successifs et sans remise d'une boule dans une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules noires, toutes différenciables. Calculer de deux façons différentes la probabilité d'obtenir trois boules blanches.

Exercice 22:

On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n (avec $n \geq 2$). On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne.

On pose A_1 " le 1^{er} tirage donne la boule numérotée 1 ". Calculer $P(A_1)$.

Plus généralement, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose A_k " le k^e tirage donne la boule numérotée k ".

Calculer $P(A_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 23:

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On tire n boules simultanément avec $n \leq N$. Soit Y le plus grand numéro obtenu au cours de ce tirage.

1. (a) Calculer $P(Y \leq k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.
(b) En déduire la loi de Y .
2. Reprendre la question précédente, lorsqu'on effectue un tirage successif et avec remise de n boules.
3. *bonus* : Soit X le plus petit numéro obtenu.
Dans chacune des expériences, calculer $P(X \geq j)$ pour tout $j \in \llbracket 1; N \rrbracket$ puis en déduire la loi de X .

Exercice 24: Le paradoxe du Duc de Toscane

Au début du 17^e siècle, un jeu de dés en vogue à la Cour consistait à lancer 3 dés et à voir les chiffres qui en résultaient. Or le Duc observa que la somme des dés valant 10 avait tendance à sortir plus souvent que la somme des dés valant 9, alors qu'il y a autant de possibilités d'écrire la somme 9 que la somme 10 :

$$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$$

$$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4$$

Pouvez-vous résoudre ce paradoxe ? (N.B. Galilée l'avait levé en 1620)

Exercice 25:

Une urne contient n boules noires et n boules blanches. On effectue des tirages sans remise jusqu'à avoir obtenu toutes les boules noires. On note X le nombre de tirages nécessaires.

1. Justifier que $X(\Omega) = \{n + k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.
2. Déterminer $P(X = n)$ et $P(X = n + 1)$.
3. ** Cas général : soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Ecrire une issue de $(X = n + k)$ et déterminer sa probabilité.
Déterminer alors le nombre d'issues de $(X = n + k)$ pour en déduire $P(X = n + k)$

Exercice 26: pour aller plus loin

On admet la formule de Vandermonde :

pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et tout $j \in \mathbb{N}$ tel que $j \leq m + n$, on a $\sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}$.

1. Calculer $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée n fois chacun.
Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois "pile".
(On pourra introduire deux variables aléatoires)
3. ** *bonus* : une urne contient n boules rouges et m boules blanches. En calculant de deux manières différentes le nombre de tirages de k boules de l'urne montrer la formule de Vandermonde.