Vrai / Faux sur les intégrales impropres

Pour chaque assertion suivante, précisez si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

1. Si une fonction f est continue sur $[0,+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$ alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ ne converge pour aucune valeur du réel α.

3. La fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ étant impaire sur $\mathbb{R}$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}dt = 0$.

4. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ diverge car $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2} = +\infty$.

5. (a) Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, et l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge alors l'intégrale $\int_a^b (f(t)+g(t))dt$ converge.
   (b) Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge, et l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ diverge alors l'intégrale $\int_a^b (f(t)+g(t))dt$ diverge.
   (c) Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, et l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ diverge alors l'intégrale $\int_a^b (f(t)+g(t))dt$ diverge.

6. Comme $\frac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et que les fonctions en jeu sont continues et positives au voisinage de $+\infty$, alors les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ sont de même nature.

7. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est faussement impropre en $+\infty$, car $e^{-t^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \in \mathbb{R}$.

8. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(t)dt$ existe, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Exercices supplémentaires :

Exercice 1: `edhec S 2015`

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$.

1. Vérifier que I_n est une intégrale convergente.
2. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$ on ait : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$.
   En déduire la valeur de I_1.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.
   En déduire l'existence et la valeur de la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.
4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
   b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   c)** En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}$.
   a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.
   b) Calculer J_0.
6. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.
   b) Déterminer alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k$ en fonction de J_n.
   c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}$ et donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
   d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et donner sa somme.
7. Compléter les commandes `python` suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n pour une valeur de n, supérieure ou égale à 2, entrée par l'utilisateur.

```
n=int(input('entrer une valeur de n supérieure ou égale à 2'));
I,J=np.log(2),1/2              raccourci pour dire I=np.log(2) et J=1/2
J =-----
for k in range(2,n+1)
    I=-----
    J= -----
```

Exercice 2:

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{1+t^2}dt$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n converge absolument.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|I_n| \leq \frac{\pi}{2}$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(nt)}{(1+t^2)^2}dt$.
4. En déduire que la suite (I_n) converge vers 0.

Corrigé Exercice 1 :`Edhec S 2015`

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ et en $+\infty$, $\dfrac{1}{x^n(x+1)} \sim \dfrac{1}{x^{n+1}}$. Comme $n+1 \geq 2 > 1$, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}dx$ converge. Le critère d'équivalence pour les fonctions continues positives permet de conclure que l'intégrale I_n converge pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2. (a) De $\frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} = \frac{(a-b)x+a}{x(x+1)}$ on tire $a-b=0$ et $a=1$: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

   (b) Pour tout A de $[1,+\infty[$, $\int_1^A \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_1^A (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})dx = [\ln|x| - \ln|x+1|]_1^A = \ln\frac{A}{A+1} + \ln 2$.
   Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \ln\frac{A}{A+1} = \lim\limits_{A\to+\infty} \ln(\frac{1}{1+1/A}) = 0$, on obtient $I_1 = \ln 2$.

3. Soit $n \geq 2$. On a : $\forall x \geq 1$, $x+1 \geq 2$ d'où par produit avec $x^n \geq 0$, $2x^n \leq (x+1)x^n$ et $0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)} \leq \frac{1}{2x^n}$.
   Par croissance de l'intégrale (toutes ces intégrales convergent, puisque la 2e est une intégrale de Riemann, et qu'on a supposé $n \geq 2$), $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)}dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^n}\text{dx}$.
   Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^n}dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}x^{-n}dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{x^{-n+1}}{(-n+1)}\right]_1^A = \dfrac{1}{2(n-1)}$ d'où $\forall n \geq 2$, $\quad 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)}$.
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n-1)} = 0$, le théorème d'encadrement permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ existe et vaut 0.

4. (a) $\frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)} = \frac{x+1}{x^{n+1}(x+1)} = \frac{1}{x^{n+1}}$, donc par un calcul de l'intégrale de Riemann analogue à 3.(a) et par linéarité de l'intégrale, $I_n + I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{n+1}}dx = \dfrac{1}{n}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x \geq 1 \Rightarrow x^{n+1} \geq x^n \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^n(x+1)} \geq \dfrac{1}{x^{n+1}(x+1)}$.
   Par croissance de l'intégrale, $I_n \geq I_{n+1}$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   Ou regarder $I_{n+1} - I_n = \int_1^{+\infty} \dfrac{1-x}{(x+1)x^{n+1}}dx \leq 0$ ....

   (c) Idée : le 3. donne une bonne majoration de I_n, mais le 0 à gauche est "grossier". Pour trouver un équivalent, il faut un "bon encadrement". Il faut donc chercher une meilleure minoration de I_n.
   Par (b) et (a), pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n} = I_n + I_{n+1} \leq I_n + I_n = 2I_n$ (car (I_n) décroissante) d'où $\frac{1}{2n} \leq I_n$.
   Avec la majoration du 3. : $\frac{1}{2n} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.
   Montrons que $I_n \sim \frac{1}{2n}$: $1 \leq I_n \times 2n \leq \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'où $I_n \times 2n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
   et finalement, $I_n \sim \frac{1}{2}\frac{1}{n}$.
   Par la règle des équivalents pour les séries à terme général positif, et puisque la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq1} \frac{1}{2n}$ diverge, la série de terme général I_n diverge.

5. (a) Même raisonnement qu'en 1. : $\frac{1}{x^n(x+1)^2} \sim \frac{1}{x^{n+2}}$, donc l'intégrale J_n converge pour tout n de $\mathbb{N}$.

   (b) $J_0 = \lim\limits_{A\to+\infty} [\frac{-1}{x+1}]_1^A = \frac{1}{2}$.

6. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \geq 1$, $\frac{1}{x^k(x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2} = \frac{1+x}{x^k(x+1)^2} = \frac{1}{x^k(x+1)}$,
   d'où par linéarité, $J_k + J_{k-1} = I_k$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(J_k + J_{k-1})$. Soit constater ensuite le télescopage (en développant les premiers termes et les derniers), soit poursuivre avec les sommes : $= \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_k + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_{k-1}$
   $= \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_k - \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-1} J_k = (-1)^{n-1} J_n - (-1)^{-1} J_0 = (-1)^{n-1} J_n + \dfrac{1}{2}$.

   (c) Soit $n \geq 2$. On a : $\quad \forall x \geq 1$, $x+1 \geq 2$ donc $(x+1)^2 \geq 4$ et $0 \leq \dfrac{1}{x^n(x+1)^2} \leq \dfrac{1}{4x^n}$. Le même raisonnement qu'en 3. permet de conclure que $\forall n \geq 2$, $\quad 0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{4(n-1)}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

   (d) En passant à la limite dans la relation de 6.(b), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = 0 + \dfrac{1}{2}$, car $|(-1)^{n-1} J_n| = J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ converge, sa somme vaut 1/2.

7.
```
I,J= np.log(2) , 1/2
J = I-J
for k in range(2,n+1):
     I = 1/(k-1) - I
     J = I - J
```

Corrigé Exercice 2 :

1. $f_n : t \mapsto \frac{\cos(nt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale I_n est impropre en $+\infty$.
De plus pour tout $t \geq 0$, $|f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$. Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par continuité et positivité des deux fonctions en jeu, et d'après le critère par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} |f_n(t)|dt$ converge, donc par continuité de $|f_n|$ sur $[0,1]$, on obtient que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt$ converge, càd que l'intégrale I_n converge absolument.

   <u>Variante</u> (d'autant plus rapide vu la question 2.!!) :
On s'arrête à la première majoration : pour tout $t \geq 0$, $|f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$. Or $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$, et avec $A > 0$, $\int_0^A \frac{1}{1+t^2}dt = [arctan(t)]_0^A = arctan(A) - 0 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge.
D'après le critère par comparaison, on en déduit que $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt$ converge, càd que l'intégrale I_n converge absolument.

2. A été fait dans la variante de la question 1.! En effet, d'après l'inégalité triangulaire, comme I_n converge absolument, $|I_n| = |\int_0^{+\infty} f_n(t)dt| \leq \int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$.

3. IPP, en posant $u = \frac{1}{1+t^2}$ donc $u = (1+t^2)^{-1}$ et $u' = -2t(1+t^2)^{-2} = -2\frac{t}{(1+t^2)^2}$ et $v' = \cos(nt)$ donc $v = \frac{1}{n}\sin(nt)$.
Avec u, v de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
Alors, en posant $A > 0$: $\int_0^A f_n(t)dt = \frac{1}{n}[\frac{\sin(nt)}{1+t^2}]_0^A + \frac{2}{n}\int_0^A \frac{t\sin(nt)}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{n}\frac{sin(nA)}{(1+A^2)} + \frac{2}{n}\int_0^A \frac{t\sin(nt)}{(1+t^2)^2}$.
Or $|\frac{sin(nA)}{(1+A^2)}| \leq \frac{1}{1+A^2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour des raisons analogues à la question 1., il est facile de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(nt)}{(1+t^2)^2}dt$ converge absolument donc converge (en effet $|\frac{t\sin(nt)}{(1+t^2)^2}| \leq \frac{t\times 1}{(t^2)^2} = \frac{1}{t^3}$).
D'où par passage à la limite, quand $A \to +\infty$, $I_n = 0 + \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(nt)}{(1+t^2)^2}dt$.

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, (avec la cv absolue du 3 et l'inégalité triangulaire),
$|I_n| \leq \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} |\frac{t\sin(nt)}{(1+t^2)^2}|dt \leq \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{c}{2n}$ où l'on note $c = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt \in \mathbb{R}$ puisque l'intégrale converge (cf 3.).
D'après le théorème d'encadrement, la suite (I_n) converge bien vers 0.