

Travaux Pratiques 10 : calcul approché de probabilités

Calcul approché d'une probabilité d'un événement A .

Protocole :

Je vous donne une pièce truquée. Quelle expérience pourriez-vous faire pour trouver une valeur approchée de la probabilité d'obtenir "pile" ?

Formalisation mathématique :

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire X_i qui vaut 1 si le i^e lancer donne pile, et 0 sinon. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i suit la même loi, et les variables (X_i) sont mutuellement indépendantes, puisque les lancers le sont.

Vous montrerez l'an prochain le résultat suivant (appelé loi faible des grands nombres) :

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E(X_1) = \quad \text{Le sens de cette limite sera bien sûr défini l'an prochain.}$$

Comme les variables X_i ne prennent que la valeur 1 ou 0, la variable $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ est égale au nombre de "pile" obtenus. Donc $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ est la variable égale à la fréquence d'apparition de l'événement pile. L'intuition qui a guidé le protocole est bien validée mathématiquement.

Plus généralement, si on cherche la probabilité d'un événement A lors d'une expérience aléatoire, on va réaliser un grand nombre (à choisir) d'expériences et on va compter le nombre d'expériences où l'événement A se réalise. La fréquence d'apparition de l'événement A fournira une valeur approchée de $P(A)$.

Exercice 1:

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$.

1. Ecrire une fonction python qui prend en entrée un entier N strictement positif, qui simule N réalisations de X , puis qui renvoie la fréquence d'apparition de l'événement $(X \geq 4)$.
2. Exécuter plusieurs fois votre fonction avec $N = 100$. Le résultat varie-t-il beaucoup ?
Faire de même avec $N = 1000$, $N = 10000$, puis $N = 1000000$ (ou plus). Quel est le bon compromis ?
3. Proposer alors une valeur approchée de $P(X \geq 4)$.
4. Bonus : reprendre la fonction de la question 1., et en trouver une variante sans boucle `for`, à l'aide de `np.sum()`.

Exercice 2:

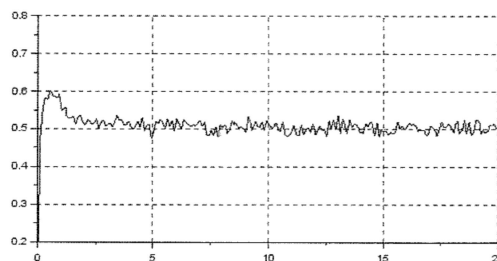
Deux joueurs effectuent chacun 10 lancers d'une pièce équilibrée de manière indépendante. On notera respectivement, X et Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus.

1. Donner une valeur approchée de la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de pile.
2. Déterminer une expression de la probabilité $P(X = Y)$ (on ne cherchera pas à la calculer).

Exercice 3: Em1 S 2018

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de même loi de Poisson de paramètre a .

1. Écrire une fonction d'en-tête `def estime(a):` qui simule un grand nombre de fois les variables X et Y , et renvoie une estimation de $P([X = Y])$.
2. Grâce à la fonction précédente, on trace, en fonction de a , une estimation de $\sqrt{\pi a} P([X = Y])$ pour $a \in]0; 20]$.
À la vue de ce graphe, proposer un équivalent de $P([X = Y])$ lorsque a tend vers $+\infty$.



3. Montrer que $P(X = Y) = e^{-2a} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{2k}}{(k!)^2}$.